

Wait a minute !!

1" - 4E - 1" 2"



3 x 3 2" 4, 2 2 2 !!

(<https://kyosukehigashida.github.io/lightsource-fis/> !)

フラクタルの

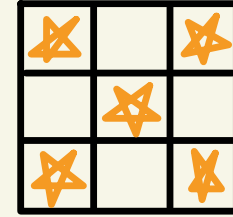
代数的研究

洞龍弥・東田京介



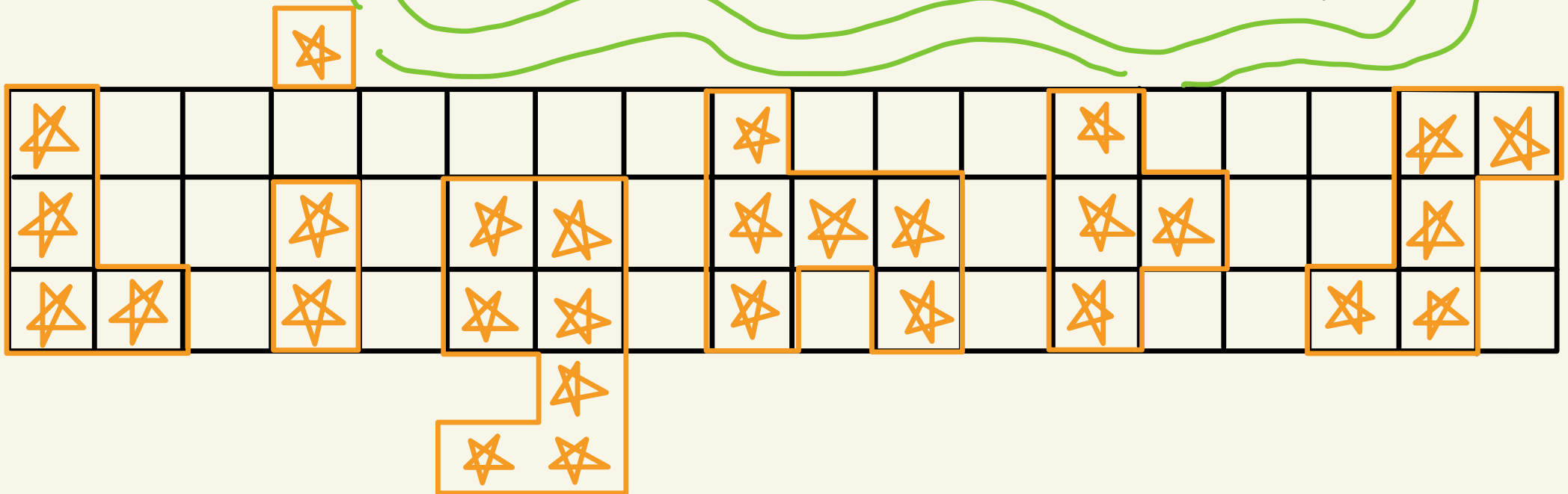
Outline

- ・ 問題と設定

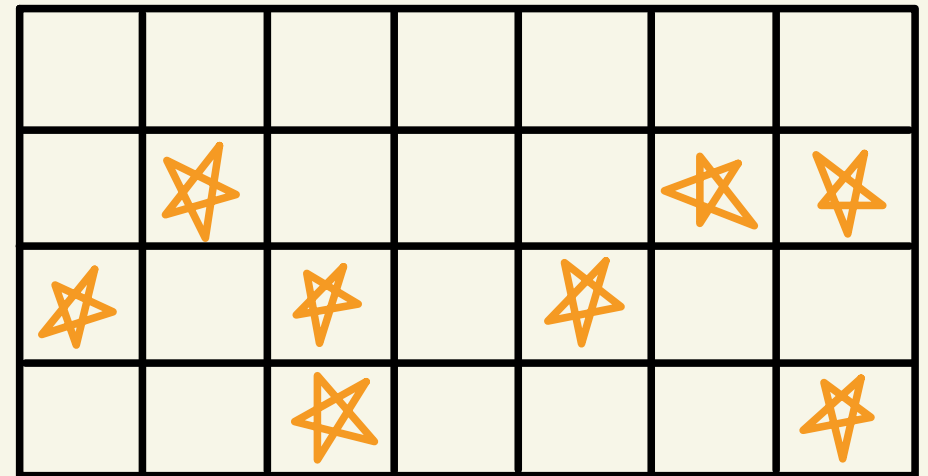
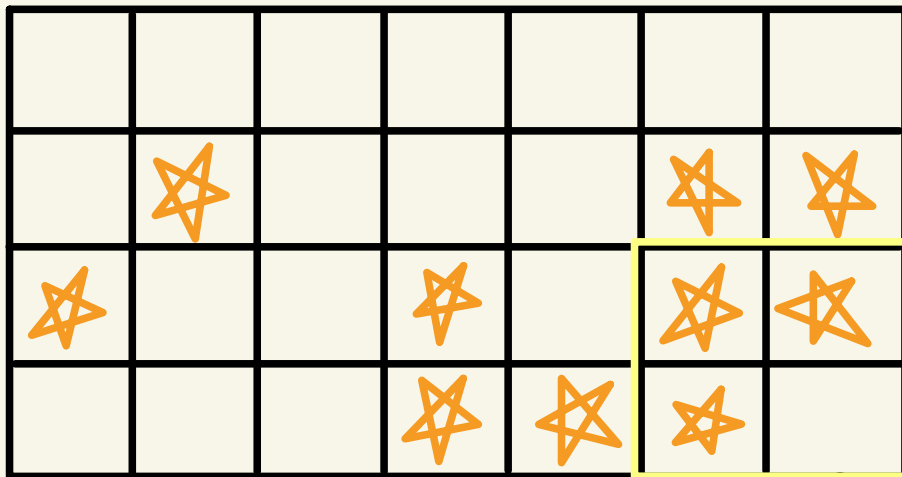
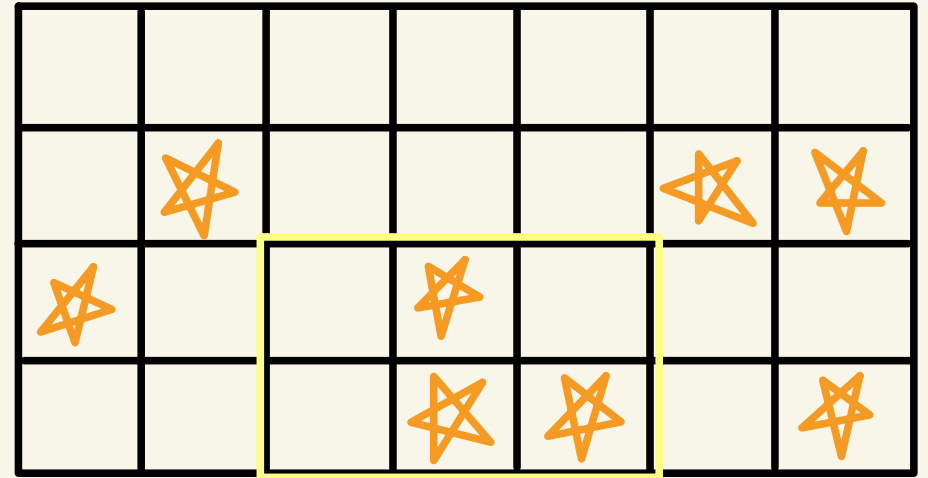
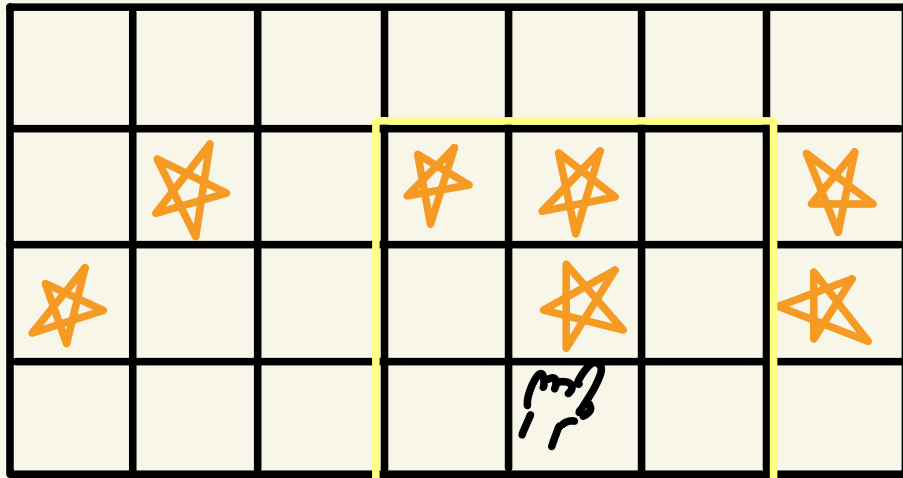


- ・ 解法と不変量

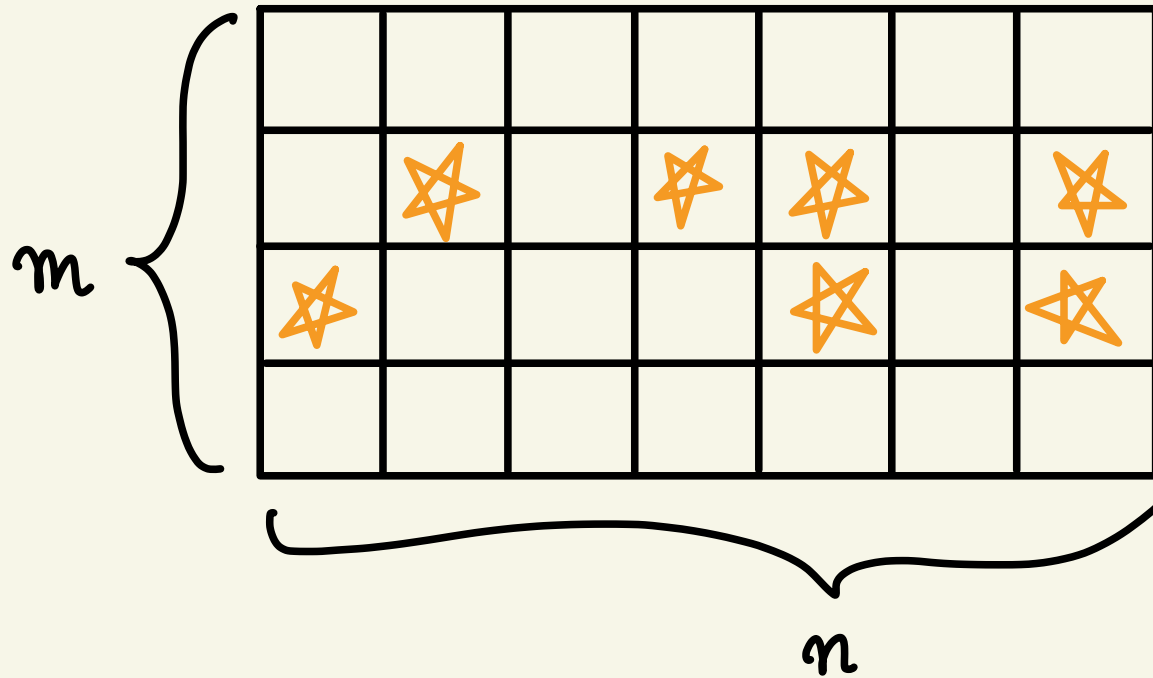
木模型—論的解釈



Problem $m \times n$ マス ($m, n \geq 1$)



Problem $m \times n$ マス ($m, n \geq 1$)

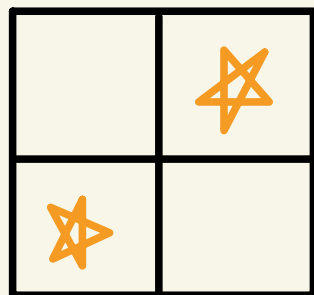
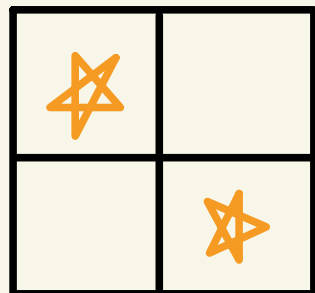
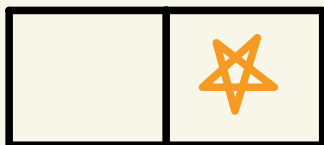
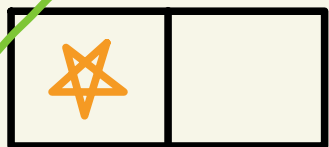


→ 全消灯できる？

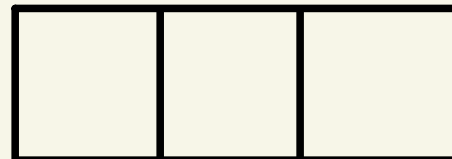
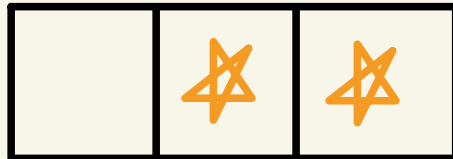
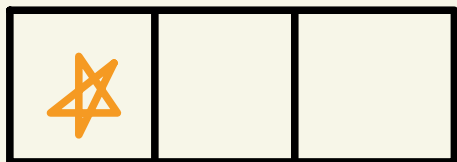
問 1. $\forall$ 初期配置が全消灯可能な m, n は？

2. 全消灯可能かどうかの判定条件は？

ex.



全消灯不可



全消灯可

解法 : モデル化

	☆		☆	☆		☆
☆				☆		☆

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

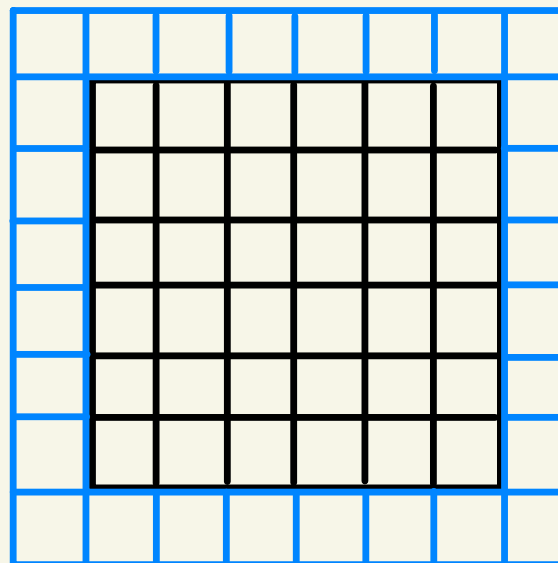
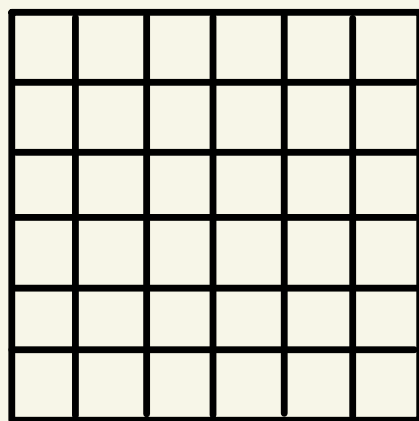
$$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$$

$$1 + 1 = 0$$

$$\mathbb{F}_2^{4 \times 7}$$

配置空間

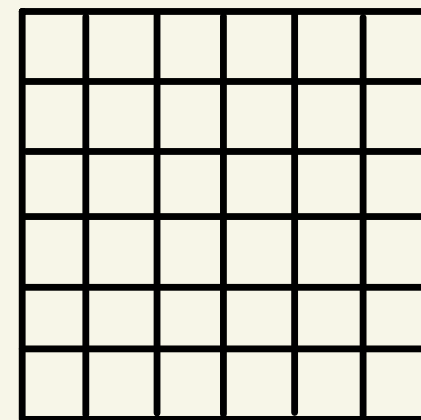
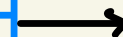
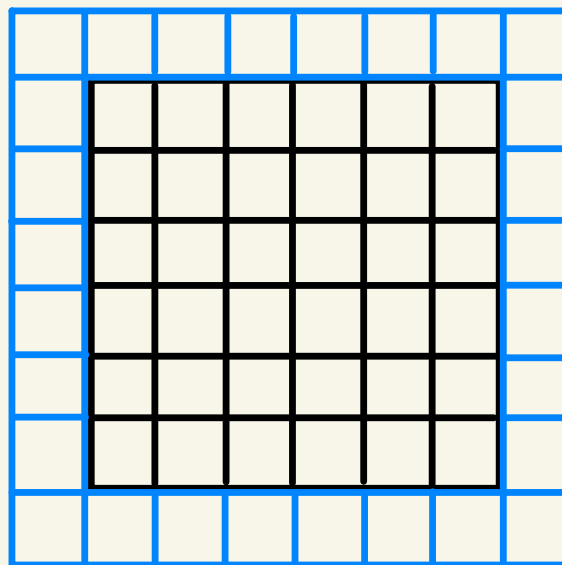
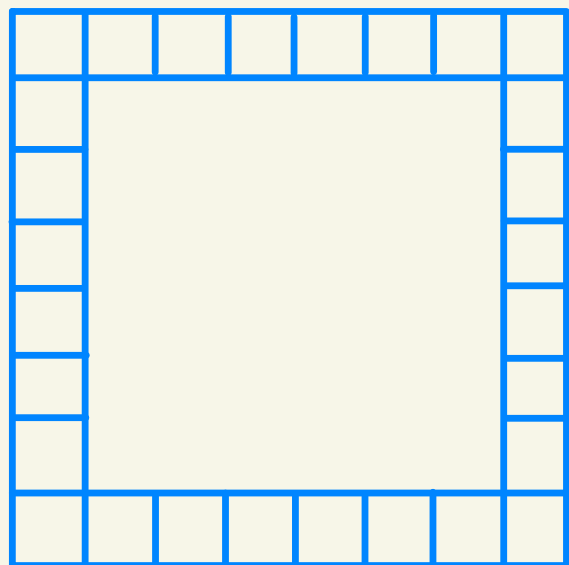
解法 : 拡大



操作していいのは
内部だけ!!

解法 : 扩大

3 games !!



edge

$$\mathbb{F}_2^{2m+2m+4}$$

interior edge $\times 4$
+ corner $\times 4$

total

$$\mathbb{F}_2^{(m+2)(n+2)}$$

bulk

$$\mathbb{F}_2^{mn}$$

解法 : $\mathbb{F}_4$: 4次有限体

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[x]/(x^2+x+1)$$

$$= \{0, 1, \omega, \omega^2\} : \text{Vector sp.} / \mathbb{F}_2$$

$$\begin{cases} \omega \cdot 1 + \omega = \omega^2 \\ \omega^3 = 1 \end{cases}$$

解法 : フィルタ

on total & edge

j
→

0 $n+1$

i
↓

0	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω
	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2
	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1
	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω
	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2
	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1
	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω
$m+1$	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2

$[i, j] =$

$$\omega^{i+j}$$

を埋める!

解法 : フリル

on total & edge

$j \rightarrow$

$0 \qquad \qquad \qquad n+1$

0	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	y_0
ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	ω	$\vdots$
ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	$\vdots$
1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	$\vdots$
ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	ω	$\vdots$
ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	$\vdots$
1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	$\vdots$
ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	ω	y_{m+1}
$m+1$	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	$\vdots$

$x_0 \quad \dots \quad x_{n+1}$

$i \downarrow$

各行/各列の

重みの
総和

$[x_0 \dots x_{n+1}, y_0 \dots y_{m+1}]$

$\cap$

$(n+1) + (m+1)$
 $\mathbb{F}_4$

ex.

1	ω	ω^2	1	ω
ω		1		ω^2
ω^2	1		ω^2	1
1		ω^2		ω
ω	ω^2	1	ω	ω^2

0

$$\omega^2 + \omega = 1$$

ω

$$\omega + 1 = \omega^2$$

0

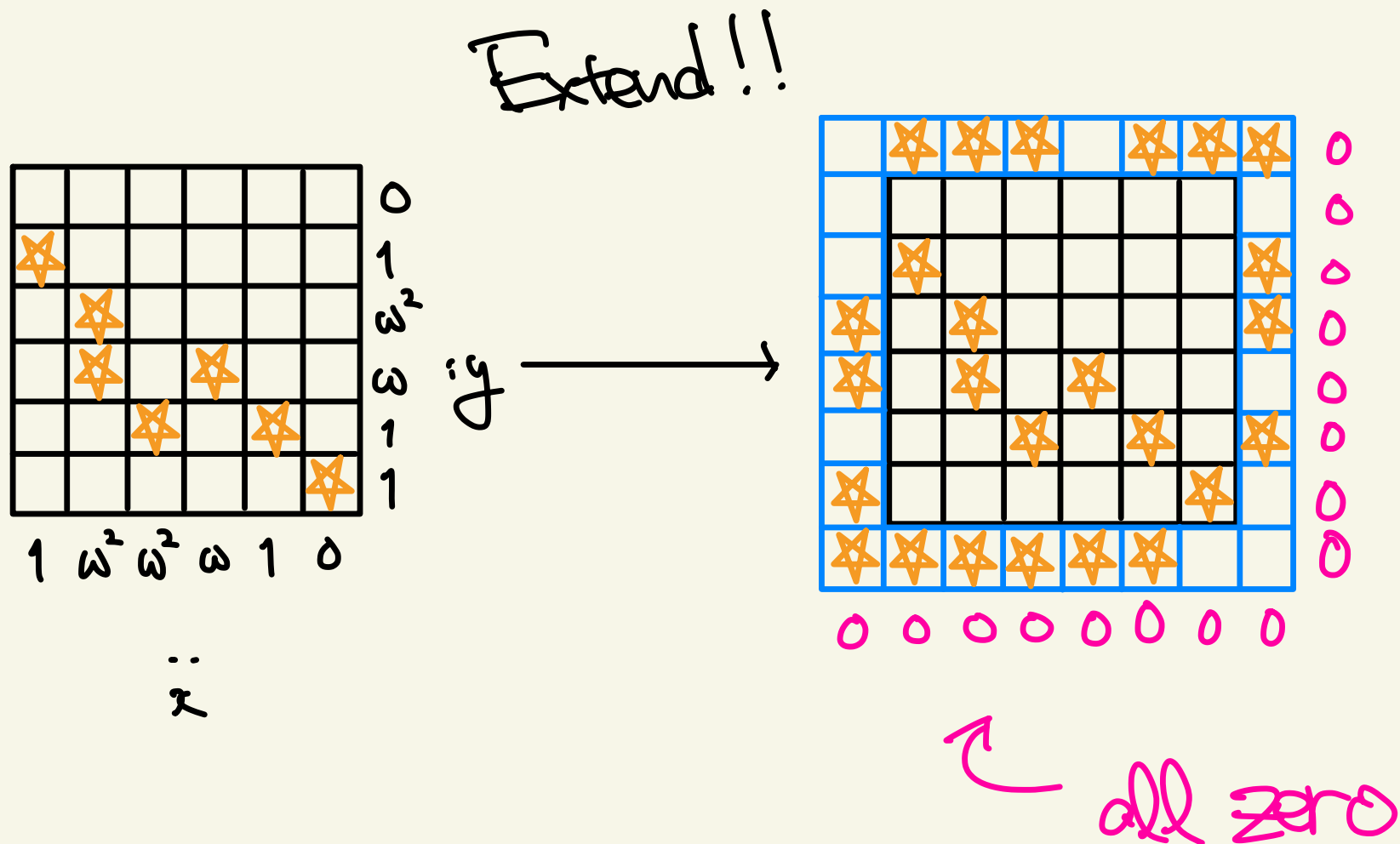
$$0 \quad \omega^2 \quad \omega \quad \omega \quad 0$$

$$\omega + \omega = 1$$

$$\omega + 1 = \omega^2$$

解法 : 拡張

いつでもできるとは限らない、が.....



解法 : 不変性

bulk の操作 Z は

ω^{i+j-2}	ω^{i+j-1}	ω^{i+j}
ω^{i+j-1}	ω^{i+j}	ω^{i+j+1}
ω^{i+j}	ω^{i+j+1}	ω^{i+j+2}

$$\omega^{i+j-2}(1 + \omega + \omega^2) = 0$$

$$\omega^{i+j-1}(1 + \omega + \omega^2) = 0$$

$$\omega^{i+j}(1 + \omega + \omega^2) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \omega^{i+j-2} & \omega^{i+j-1} & \omega^{i+j} \\ \underbrace{\quad}_1 & \underbrace{\quad}_1 & \underbrace{\quad}_1 \\ + & + & + \\ \omega & \omega & \omega \\ + & + & + \\ \omega^2 & \omega^2 & \omega^2 \end{array}$$

$$= 0 \rightsquigarrow [x, y] : \text{invariant !!}$$

解法

Prop.

- total game の盤面: α 。
- α の 4 変量を $\tau(\alpha) = [x, y]$ とする。

α が 全消灯可能

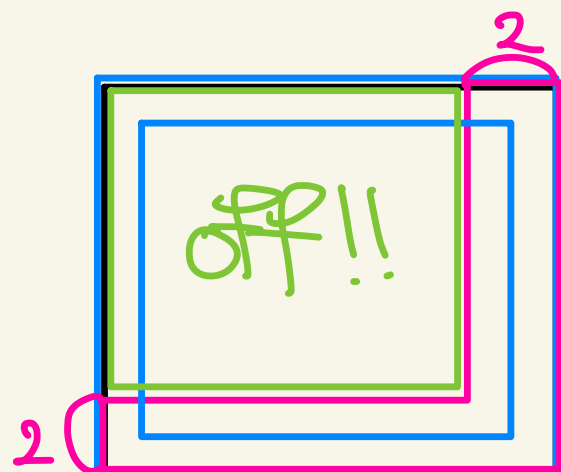
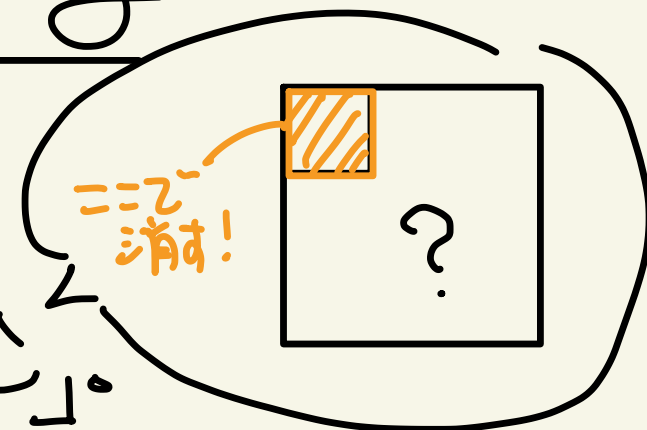
$$\Leftrightarrow \tau(\alpha) = [0, 0]$$

Sketch of proof)

• all off $\Rightarrow \tau(\alpha) = 0$: easy

• $\tau(\alpha) = 0 \Rightarrow$ all off

★ 左上から右下へと追い込む。



assumption
 $\rightarrow y = 0$

assumption
 $\tau = 0$

off? ないかも...

Q $\{\omega^{ij}, \omega^{i+j+1}\}$ は
 $\mathbb{F}_2$ 上一次独立

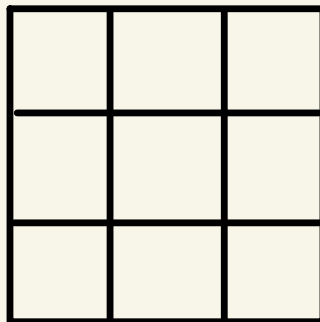
$\rightarrow$ 残り実は 0!!



解法

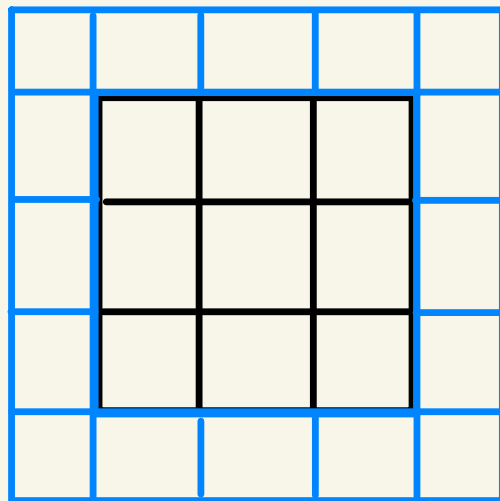
だから...

bulkの配置



が

totalの配置



へと、

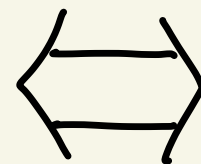
$x, y = 0$ となるように拡張できる。

bulkの配置

が

全消灯

可能!!



Sketch of Proof)

α_{bulk} : bulk game の配置

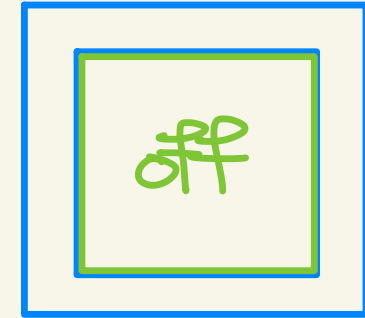
Question

α_{bulk} が全消灯可 $\Rightarrow \exists \alpha$: total の配置
s.t. • bulk 2 は α_{bulk} に一致。
• $\tau(\alpha) = 0$ 。

- $S(\alpha_{\text{bulk}})$: edge ≥ 0 で埋めた total game の配置

Assume

α_{bulk} が全消灯可



edge は
off とは
限らない

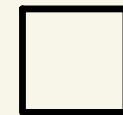
$\leadsto S(\alpha_{\text{bulk}})$ は、bulk 上は消せる。
残り $\geq \alpha_{\text{edge}}$ と $\frac{1}{2} < \cdot$ 。

$\leadsto \alpha_{\text{edge}}$

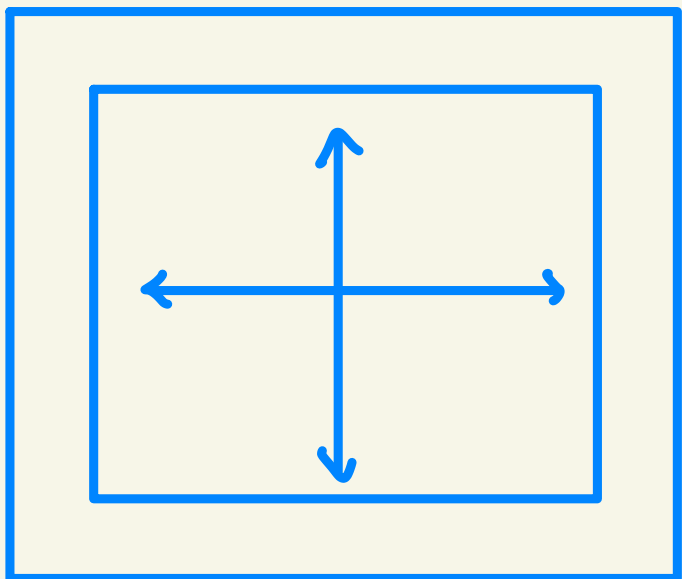
$$\therefore \tau(S(\alpha_{\text{bulk}})) = \tau(\alpha_{\text{edge}})$$

$\leadsto S(\alpha_{\text{bulk}}) + \alpha_{\text{edge}}$ は、 α_{bulk} の $\tau = 0$ となる

拡張 !!



∀初期配置が全消灯可能な m, n ?



$$\begin{array}{ccc}
 1 & \dots & \omega^j & \dots & \omega^{n+1} \\
 \vdots & & & & \vdots \\
 \omega^i & & & & \omega^{i+n+1} \\
 \vdots & & & & \vdots \\
 \omega^{m+1} & \dots & \omega^{m+j+1} & \dots & \omega^{m+n+2}
 \end{array}$$

$\leadsto \{1, \omega^{n+1}\}, \{1, \omega^{m+1}\}$ は

$\mathbb{F}_2$ 上 $\mathbb{F}_4$ の基底?

∀初期配置が全消灯可能な m, n ?

$$\{1, \omega^{n+1}\}, \{1, \omega^{m+1}\}$$

//

//

$1, \omega, \omega^2$ のどれか! $\leadsto$ 1 のときだけ
帰属!

$\leadsto m, n$ はそれぞれ

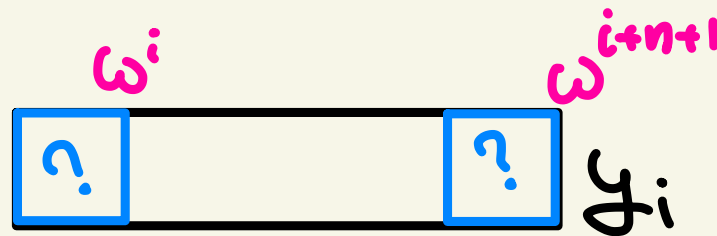
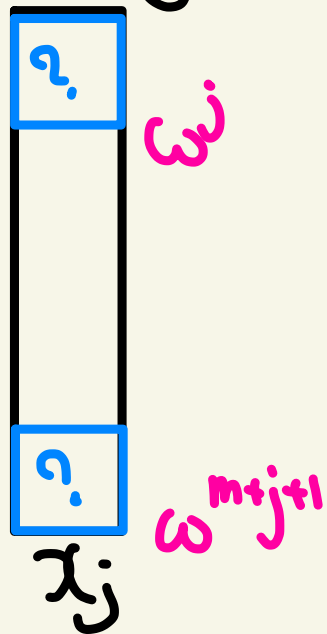
$\neq 2 \bmod 3 \Rightarrow$ 基底!

$= 2 \bmod 3 \Rightarrow$ 一次従属!

∀ 初期配置が全消灯可能な m, n ?

$m, n \neq 2 \pmod 3$ のとき。

∀ の bulk の初期配置 α_{bulk} について、
 $\tau(s(\alpha_{\text{bulk}}))$ の各行、列) の値を **打ち消す** ように、
edge の 0, 1 を決められる!



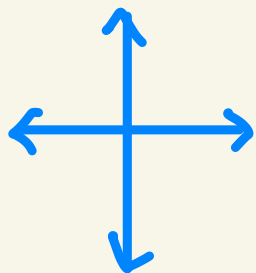
→ いつも
一意に拡張
できる!!

x_j, y_i に対して **?** を決める!

$\neg m, n \neq 2 \pmod 3$ は正しい。

- 拡張可能な bulk 配置としても一意性は失う。

$l=1, 2$ の ω^i は



$m \neq 2 \pmod 3$

1	...	1
$\vdots$		$\vdots$
ω^l	...	ω^l

or

1	...	ω^l
$\vdots$		$\vdots$
1	...	ω^l

$m \neq 2 \pmod 3$

or

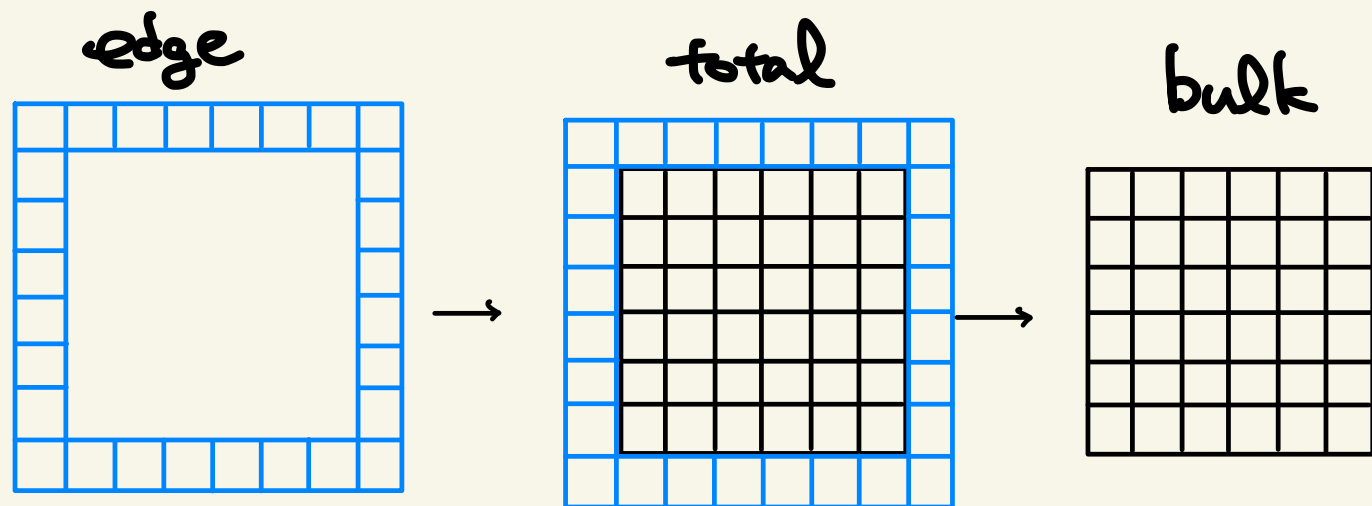
1	...	1
$\vdots$		$\vdots$
1	...	1

$m, n = 2 \pmod 3$

拡張さえあれば

→ やはり全消灯できる。

ホロジ理論的解釈

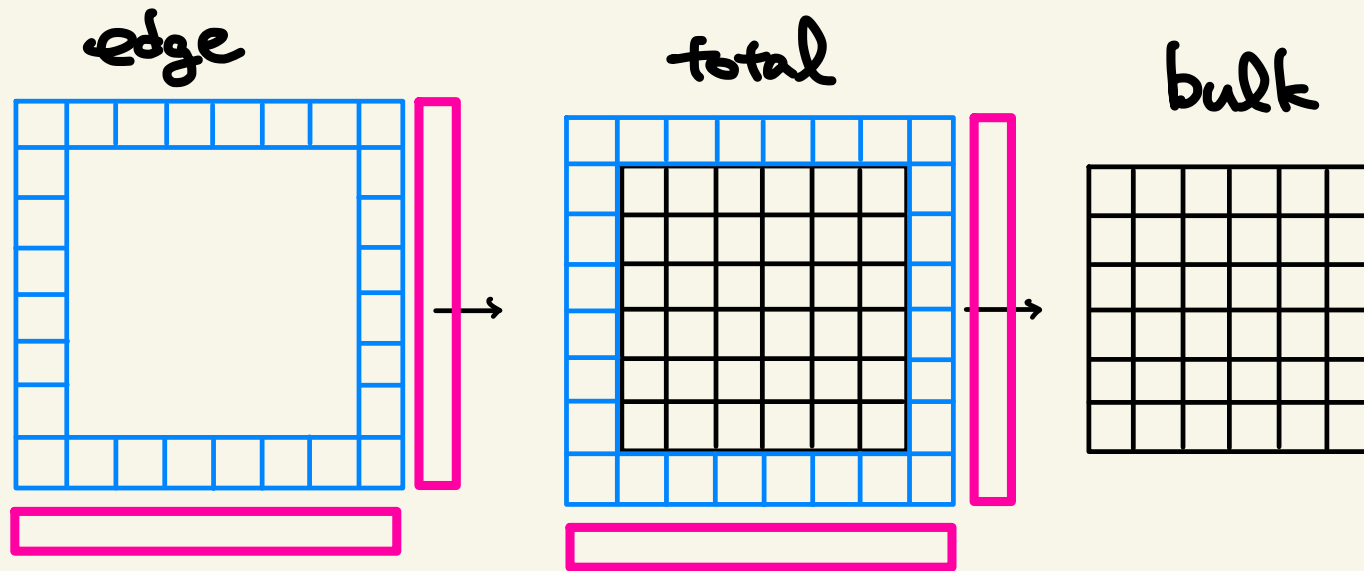


$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_2^{2n+2m+4} \hookrightarrow \mathbb{F}_2^{(n+2)(m+2)} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2^{nm} \longrightarrow 0$$

: exact.

忘る。

ホモロジー論的解釈



$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_2^{2n+2m+4} & \hookrightarrow & \mathbb{F}_2^{(n+2)(m+2)} & \twoheadrightarrow & \mathbb{F}_2^{nm} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \tau_{\text{edge}} & & \downarrow \tau & & \downarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_4^{n+2} \times \mathbb{F}_4^{m+2} & \xrightarrow{=} & \mathbb{F}_4^{n+2} \times \mathbb{F}_4^{m+2} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \text{: exact}
 \end{array}$$

ホモロジー論的解釈 : Snake lemma

全消滅可能の全2!

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \ker \tau_{\text{edge}} & \longrightarrow & \ker \tau & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & \mathbb{F}_2^{nm} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 & & \mathbb{F}_2^{2n+2m+4} & \hookrightarrow & \mathbb{F}_2^{(n+2)(m+2)} & \twoheadrightarrow & \mathbb{F}_2^{nm} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \tau_{\text{edge}} & & \downarrow \tau & \text{ } \delta & \downarrow 0 \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{F}_4^{n+2} \times \mathbb{F}_4^{m+2} & \longrightarrow & \mathbb{F}_4^{n+2} \times \mathbb{F}_4^{m+2} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 & & \text{Coker } \tau_{\text{edge}} & \longrightarrow & \text{Coker } \tau & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

: exact !!

ホモロジー論的解釈 : Snake lemma

☆ δ は 先に述べた.

α_{bulk} の $\text{total } \wedge$ の拡張の

存在を判定する射である。

つまり.

α_{bulk} が $\text{total } \wedge$.

$\tau = 0$ なるように $\Leftrightarrow \delta(\alpha_{\text{bulk}}) = 0$

拡張可。

ホロジ-論的解釈: Snake lemma

$\alpha_{\text{bulk}} \cong \text{total} \wedge 0\text{-edge 拡張} \hookrightarrow S(\alpha_{\text{bulk}})$
を得る。

$\leadsto$ edge上の配置 $\alpha_{\text{edge}} \cong \#112$.

$$\textcircled{a} \quad \tau(S(\alpha_{\text{bulk}})) = \tau_{\text{edge}}(\alpha_{\text{edge}})$$

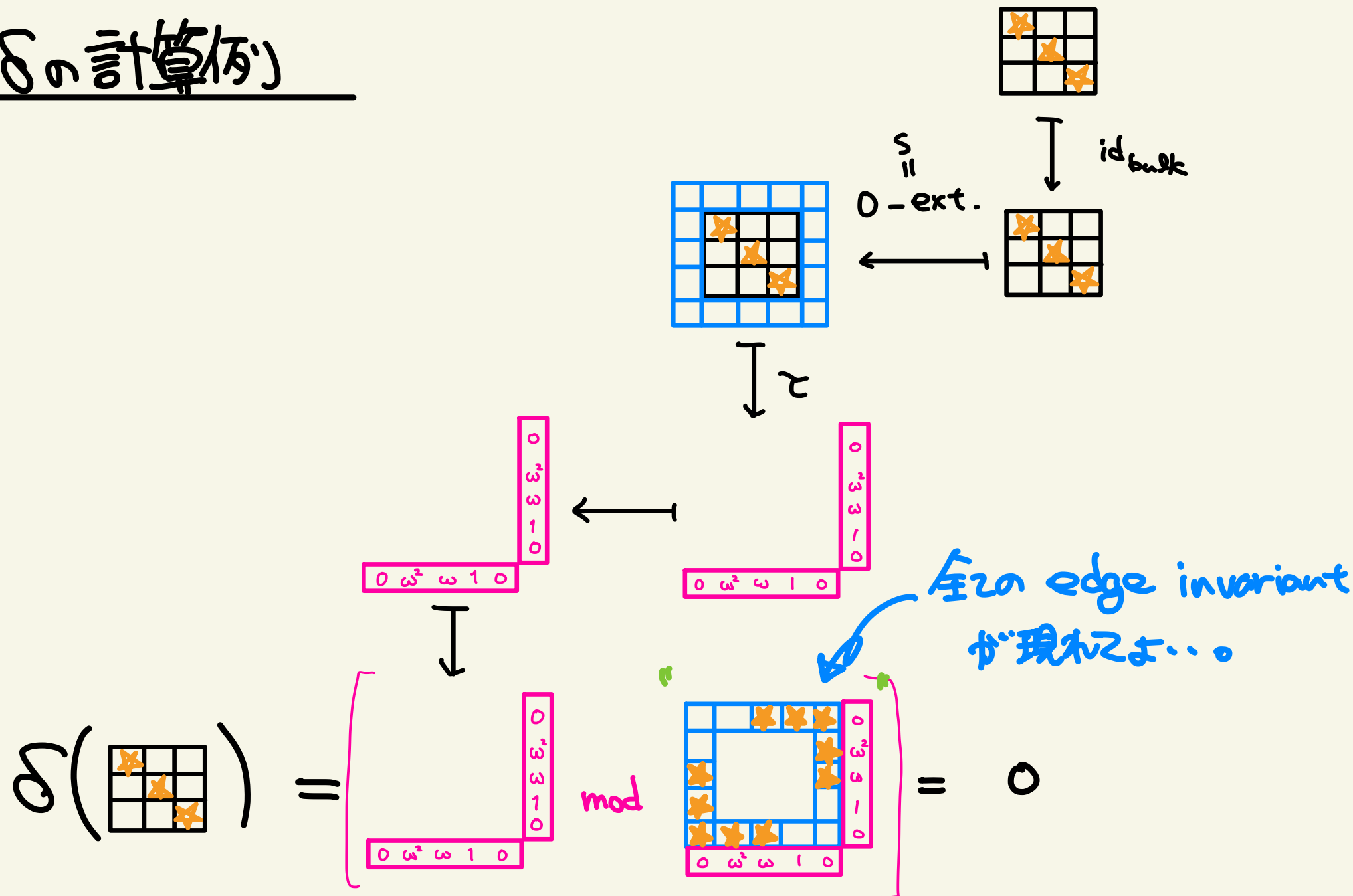
$\Downarrow$

$$\delta(\alpha_{\text{bulk}}) = 0 \in \text{Coker}(\tau_{\text{edge}}) \quad \leftarrow \text{同じ事!!}$$

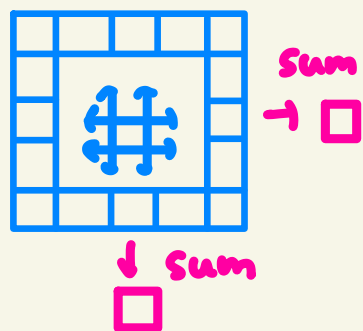
$$= \mathbb{F}_4^{n+2} \times \mathbb{F}_4^{m+2} / \text{Im } \tau_{\text{edge}}$$

ホモロジー論的解釈 : Snake lemma

δ の計算例

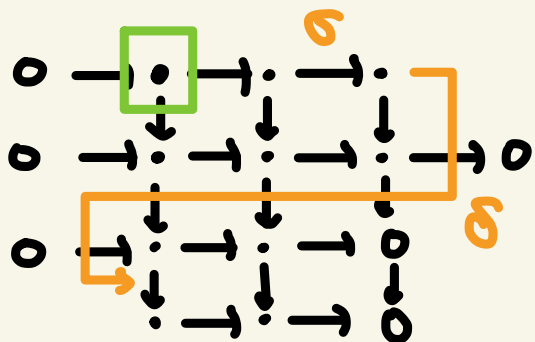


ホモロジー論的解釈 : Snake lemma



向かい合う interior edge と corner
の和が 0 になる状態を数える。

$$\text{Ker } \tau_{\text{edge}} = \begin{cases} 0 & (n, m \neq 2 \pmod 3) \\ n & (n \neq 2, m = 2 \pmod 3) \\ m & (m \neq 2, n = 2 \pmod 3) \\ n+m-1 & (m, n = 2 \pmod 3) \end{cases}$$



ホモロジー論的解釈：交代和

一般に.

$$0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow 0 : \text{exact}$$

$$\Rightarrow \dim A_1 - \dim A_2 + \dim A_3 - \dots + (-1)^{n-1} \dim A_n = 0$$

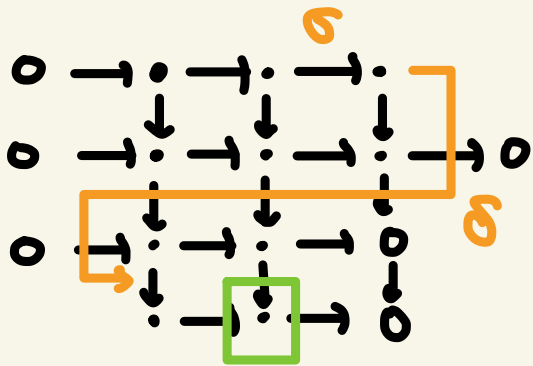
~~~~~ Snake Lemma か

多くの次元の間の関係式を生み出す。

# ホモロジー論的解釈:

Fact

$$\operatorname{Coker} \tau \cong \mathbb{F}_4^2 \quad (\dim_{\mathbb{F}_2} = 4)$$



$(\therefore) \operatorname{Coker} \tau \rightarrow \mathbb{F}_4^2 \cong$   
構成.

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \operatorname{Coker} \tau \leq 4$$

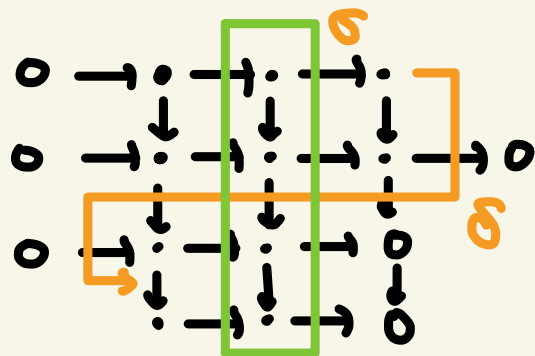
$\exists$  示す。  $\square$

# ホロロジー論的解釈：

Rel. 1

$$\dim \ker \tau - \dim \mathbb{F}_2^{(n+2)(m+2)} + \dim \mathbb{F}_4^{(n+2)+(m+2)} - \dim \mathbb{F}_4^2 = 0$$

$$\therefore \dim \ker \tau = (m+2)(n+2) - 2(m+2+n+2) + 4$$



$$= mn = \dim \mathbb{F}_2^{mn}$$

：全消灯可能な配置は  
bulkの配置と数は等しい！

# ホモロジー論的解釈：

## Rel. 2

$$\dim \ker \tau_{\text{edge}} - \overset{mn}{\parallel} \dim \ker \tau + \dim \mathbb{F}_2^{mn}$$

全消灯可能と  
bulk全体の  
ズレを測っている。

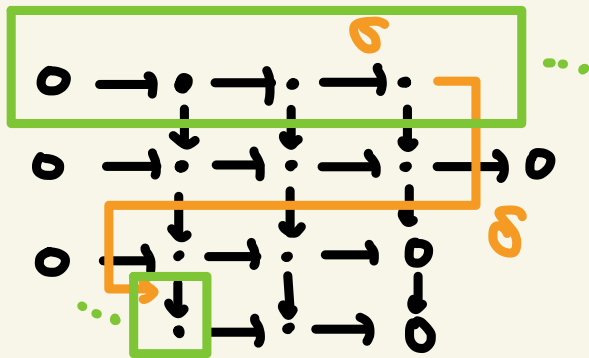
$$- \dim \operatorname{Coker} \sigma = 0$$

$$\therefore \underline{\dim \operatorname{Coker} \sigma}$$

$$= \dim \ker \tau_{\text{edge}}$$

$$= \begin{cases} n^0 \\ m \\ n+m-1 \end{cases} \dots$$

!!



## ホロロジー論的解釈：

Coker  $\sigma$  の次元は.

$H_2^{mn}$ : bulk の配置の、全消灯可能配置  
の剰余の数を測る。

→ この数は

$$\begin{cases} 1 \\ 2^n & (m = 2 \bmod 3) \\ 2^m & (n = 2 \bmod 3) \\ 2^{n+m-1} & (m, n = 2 \bmod 3) \end{cases} !!$$

# 結び

興味深い構造をもつ lightsout の変種  
なんか見つけたらぜひ教えてください！  
ホモジ-代数も面白い！

## REFERENCES

- [AF98] Marlow Anderson and Todd Feil. “Turning lights out with linear algebra”. *Mathematics magazine* 71.4 (1998), pp. 300–303.
- [FY13] Rudolf Fleischer and Jiajin Yu. “A survey of the game “Lights Out!””. *Space-Efficient Data Structures, Streams, and Algorithms: Papers in Honor of J. Ian Munro on the Occasion of His 66th Birthday*. Springer, 2013, pp. 176–198.
- [FG25] Bradley Forrest and Riya Goyal. “Lights Out On Nearly Complete Graphs”. *arXiv preprint arXiv:2508.09341* (2025).
- [Jek+18] David Jekel et al. “Algebraic properties of generalized graph laplacians: Resistor networks, critical groups, and homological algebra”. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 32.2 (2018), pp. 1040–1110.
- [Sut89] Klaus Sutner. “Linear cellular automata and the Garden-of-Eden”. *The Mathematical Intelligencer* 11.2 (1989), pp. 49–53.

Thank you



for listening & playing!