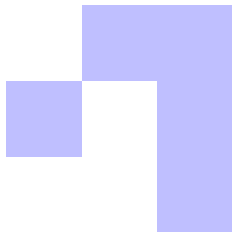


Space $\times$ Time for Conway's Game of Life

時間に依存した空間を relative topos で捉える



洞龍弥

東京大学数理科学研究科 博士 2 年

CSCAT2026



Slides

発表の概要

- Section 1 導入 「Game of Life における幾何はただの位相空間でも、ただの離散力学系でもない！」
- Section 2 Pretopology という動的な topology 概念を用いて、Game of Life の素朴な定式化を与える.
- Section 3 Section 2 を圏論的に解釈し、Game of Life を relative topos $\text{PSh}(\text{Space} \times \text{Time})$ の中に実現する.
- Section 4 展望: どこを目指すのか

Table of Contents

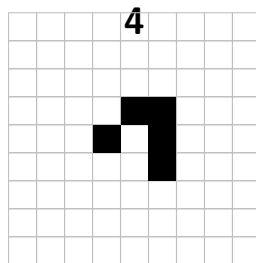
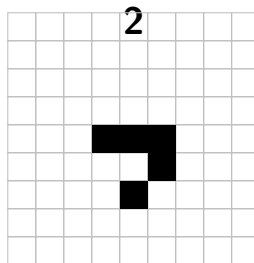
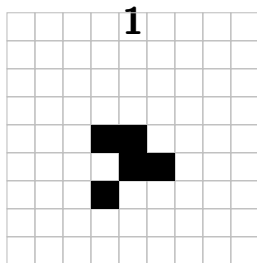
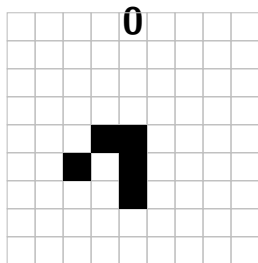
- 1 導入: Game of Life における空間と時間
- 2 Pretopology と Dynamical presheaf
- 3 A Space×Time as a relative topos
- 4 展望とお願い

Table of Contents

- 1 導入: Game of Life における空間と時間
- 2 Pretopology と Dynamical presheaf
- 3 A Space×Time as a relative topos
- 4 展望とお願い

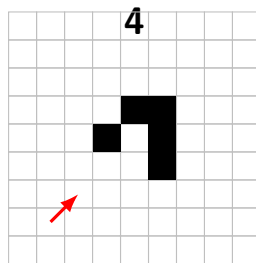
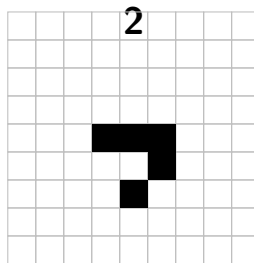
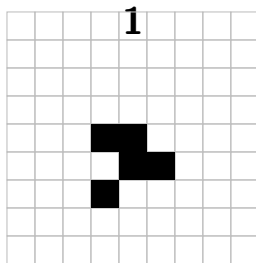
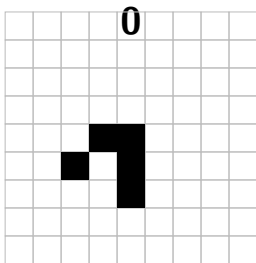
Conway's Game of Life

$\mathbb{Z}^2$ の各点が、近傍の明滅だけを見て時間発展する.



$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$$

出発点: 「グライダーが右上に動く」



問題意識

この「右上に動く」という言明を可能にしている $\mathbb{Z}^2$ の幾何的構造は何か？

→ ただの位相空間でも, ただの離散力学系 (=N-set) でもない!

ただの位相空間でも，ただの離散力学系でもない！

空間だけ

$\mathbb{Z}^2$ に位相 (or graph) を入れて，ただの空間として捉える？

→ 時間発展が見えにくい

時間だけ

単に離散力学系 (= 集合と自己写像) として捉える？

→ 空間情報が見えにくい

どちらも不十分！

スローガン

$\mathbb{Z}^2$ の点たちは，時間発展における相互作用を通じて，空間的なつながりを得ている．

このスローガンを数学的に定式化したい．

発表の概要

- Section 1 導入 「Game of Life における幾何はただの位相空間でも、ただの離散力学系でもない！」
- Section 2 Pretopology という動的な topology 概念を用いて、Game of Life の素朴な定式化を与える.
- Section 3 Section 2 を圏論的に解釈し、Game of Life を relative topos $\text{PSh}(\text{Space} \times \text{Time})$ の中に実現する.
- Section 4 展望: どこを目指すのか

Table of Contents

- 1 導入: Game of Life における空間と時間
- 2 Pretopology と Dynamical presheaf
- 3 A Space×Time as a relative topos
- 4 展望とお願い

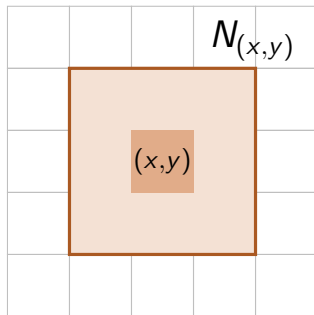
Pretopology(1/3) 近傍 $N_{(x,y)}$

空間的側面と時間的側面を兼ね備えた素朴な (less categorical な) 数学的記述を1つ与えよう.

Def (近傍 $N_{(x,y)}$)

各点 $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ に対し, 隣接する9マスからなる集合 $N_{(x,y)} \subset \mathbb{Z}^2$ を近傍と呼ぶ.

Game of Life では, 1ステップ後の各点 (x, y) の状態は, 近傍 $N_{(x,y)}$ の状態だけから決まる.



Pretopology(2/3) 内部 $\text{Int}(S)$

Def (内部)

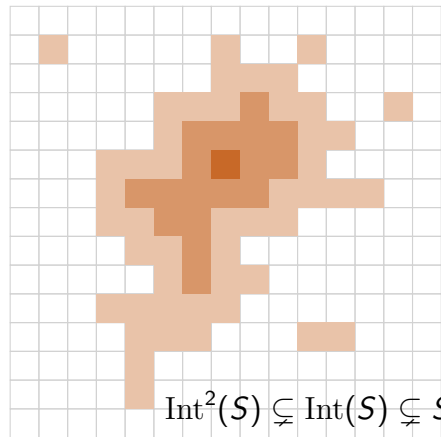
$S \subset \mathbb{Z}^2$ について, その内部を次で定める.

$$\text{Int}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid N_{(x,y)} \subset S\}$$

Game of Life は, 各 $S \subset \mathbb{Z}^2$ に対して

$$\delta_S: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(\text{Int}(S))$$

という写像を定めている.



Pretopology(3/3) := 動的な Topology

Def (pretopology)

集合 X 上の **pretopology** とは, 写像

$$\text{Int}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

であって

- ▶ $\text{Int}(S \cap T) = \text{Int}(S) \cap \text{Int}(T)$
- ▶ $\text{Int}(X) = X$
- ▶ $\text{Int}(S) \subset S$

を満たすもの.

Example (Game of Life)

先ほどの Int は, $\mathbb{Z}^2$ 上の pretopology である.

Example (Ordinary topology)

Ordinary **topology** は冪等な

$$\text{Int}^2 = \text{Int}$$

pretopology と同義.

冪等性 $\text{Int}^2 = \text{Int}$ を仮定しない!

→ 動的な **topology**

Dynamical presheaf over a pretopology

Def (Dynamical presheaf DPSH)

Pretopology (X, Int) 上の **dynamical presheaf** (F, δ) とは, presheaf

$$F: \mathcal{P}(X)^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

と, 整合的な写像の族

$$\delta = \{\delta_S: F(S) \rightarrow F(\text{Int}(S))\}_{S \subset X}$$

の組のことをいう.

$\text{DPSH}(X, \text{Int}) := \text{Dynamical presheaf の圏}$

$$\begin{array}{ccc} F(S) & \xrightarrow{\delta_S} & F(\text{Int}(S)) \\ \text{res} \downarrow & \text{整合的} & \downarrow \text{res} \\ F(T) & \xrightarrow{\delta_T} & F(\text{Int}(T)) \end{array}$$

Example (Game of Life)

Game of Life は pretopology $(\mathbb{Z}^2, \text{Int})$ 上の dynamical presheaf

$$\text{GoL} \in \text{DPSH}(\mathbb{Z}^2, \text{Int})$$

を与える.

発表の概要

- Section 1 導入 「Game of Life における幾何はただの位相空間でも、ただの離散力学系でもない！」
- Section 2 Pretopology という動的な topology 概念を用いて、Game of Life の素朴な定式化を与える.
- Section 3 Section 2 を圏論的に解釈し、Game of Life を relative topos $\text{PSh}(\text{Space} \times \text{Time})$ の中に実現する.
- Section 4 展望: どこを目指すのか

Table of Contents

- 1 導入: Game of Life における空間と時間
- 2 Pretopology と Dynamical presheaf
- 3 A Space×Time as a relative topos
- 4 展望とお願い

Relative topos (1/2): Definition

Def (Relative topos)

Topos $\mathcal{S}$ 上の **relative topos** とは, topos $\mathcal{E}$ と geometric morphism

$$\gamma: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{S}$$

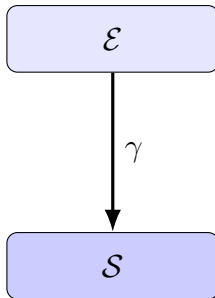
の組 $(\mathcal{E}, \gamma)$ のこと.

Example (Ordinary geometry)

Grothendieck topos は Set 上の relative topos と見なせる

$$\gamma: \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Set}$$

$\mathcal{S}$ -relative topos



base topos

Relative topos (2/2): relative presheaf topos

Fact (Internal presheaf は relative topos をなす)

Topos $\mathcal{S}$ とその internal category $\mathcal{D}$ について, $\mathcal{S}$ -internal presheaf の圏 $\text{PSh}_{\mathcal{S}}(\mathcal{D})$ は $\mathcal{S}$ -relative topos である.

$\mathcal{S}$ 自身が presheaf topos であるとき, 次が成立する.

Example (Presheaf-internal presheaf = Presheaf)

Small category C と $\text{PSh}(C)$ -internal category $\mathcal{D}: C^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ について, $\text{PSh}_{\text{PSh}(C)}(\mathcal{D})$ は

$$\text{PSh}_{\text{PSh}(C)}(\mathcal{D}) \simeq \text{PSh}(\mathcal{D} \times C)$$

とかける. (cf. [Johnstone 2002])

$\mathcal{S}$ -relative
presheaf topos

$\text{PSh}_{\mathcal{S}}(\mathcal{D})$

γ

$\mathcal{S}$

$\ni \mathcal{D}$

base topos

GoL は離散力学系-relative presheaf(1/3): $\mathcal{S} := \mathbf{PSh}(\mathbb{N})$

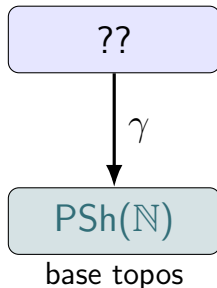
Def (離散力学系)

離散力学系とは, 集合 A と自己写像 $s: A \rightarrow A$ の組 (A, s) .

離散力学系の圏 $\mathbf{PSh}(\mathbb{N})$ は topos である

→ $\mathbf{PSh}(\mathbb{N})$ -relative topos theory では base topos $\mathcal{S} = \mathbf{PSh}(\mathbb{N})$ に時間発展が組み込まれている! (cf. [Tomasic 2020])

$\mathbf{PSh}(\mathbb{N})$ -relative topos



GoL は離散力学系-relative presheaf(2/3): メイン主張

Pretopology $\text{Int}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ は順序を保つ:

Lemma (Pretopology は internal poset)

$(\mathcal{P}(X), \text{Int})$ は $\text{PSh}(\mathbb{N})$ -internal poset.

Thm (Dynamical presheaf as relative presheaf)

$$\text{DPSH}(X, \text{Int}) \simeq \text{PSh}_{\text{PSh}(\mathbb{N})}(\mathcal{P}(X), \text{Int})$$

$\text{PSh}(\mathbb{N})$ -relative topos

$$\text{PSh}_{\text{PSh}(\mathbb{N})}(\mathcal{P}(X), \text{Int})$$

γ

$\text{PSh}(\mathbb{N})$

$\ni \mathcal{P}(X)$

base topos

Cor (Game of life は space $\times$ time 上の presheaf)

$$\text{GoL} \in \text{DPSH}(\mathbb{Z}^2, \text{Int}) \simeq \text{PSh}_{\text{PSh}(\mathbb{N})}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2), \text{Int}) \simeq \text{PSh}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \rtimes_{\text{Int}} \mathbb{N})$$

GoL は離散力学系-relative presheaf(3/3): 気持ち

Cor (Game of life は space $\times$ time 上の presheaf) 再掲

$$\text{GoL} \in \text{PSh}_{\text{PSh}(\mathbb{N})}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2), \text{Int}) \simeq \text{PSh}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \rtimes_{\text{Int}} \mathbb{N})$$

ordinary geometry

Time-dependent geometry

$$\text{Sh}(X) \rightarrow \text{Set}$$

$$\text{PSh}_{\text{PSh}(\mathbb{N})}(\mathcal{P}(X), \text{Int}) \rightarrow \text{PSh}(\mathbb{N})$$

時間発展の内部で空間を考えると、
単純な並列 Space $\times$ Time ではなく
依存関係 Space $\rtimes$ Time を捉えられる！

観察 (1/2): $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \rtimes_{\text{Int}} \mathbb{N}$ はどんな圏?

Cor (Game of life は space $\times$ time 上の presheaf) 再掲

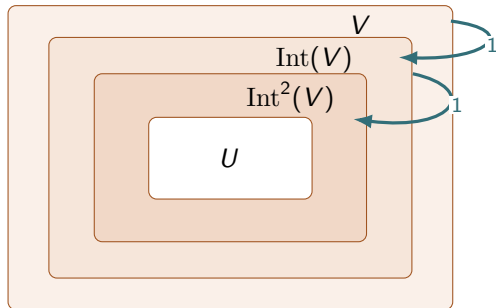
$$\text{GoL} \in \text{PSh}_{\text{PSh}(\mathbb{N})}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2), \text{Int}) \simeq \text{PSh}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \rtimes_{\text{Int}} \mathbb{N})$$

Object $\mathbb{Z}^2$ の subset $U \subset X$

Morphisms 射 $U \rightarrow V$ は自然数

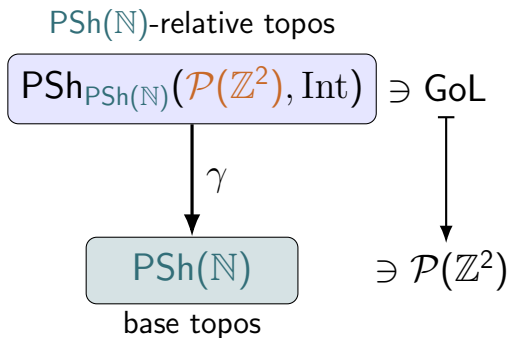
$n \in \mathbb{N}$ であって

$U \subset \text{Int}^n(V)$ を満たす
もの



観察 (2/2): 大域切断 $\gamma : \text{PSh}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \rtimes_{\text{Int}} \mathbb{N}) \rightarrow \text{PSh}(\mathbb{N})$

$\text{GoL} \in \text{PSh}(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \rtimes_{\text{Int}} \mathbb{N})$
の大域切断は
 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2) \in \text{PSh}(\mathbb{N})$
である.



発表の概要

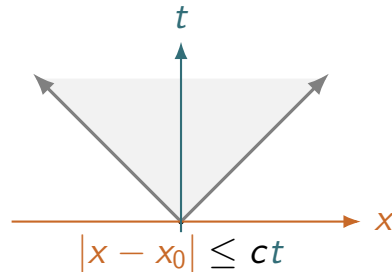
- Section 1 導入 「Game of Life における幾何はただの位相空間でも、ただの離散力学系でもない！」
- Section 2 Pretopology という動的な topology 概念を用いて、Game of Life の素朴な定式化を与える.
- Section 3 Section 2 を圏論的に解釈し、Game of Life を relative topos $\text{PSh}(\text{Space} \times \text{Time})$ の中に実現する.
- Section 4 展望: どこを目指すのか

Table of Contents

- 1 導入: Game of Life における空間と時間
- 2 Pretopology と Dynamical presheaf
- 3 A Space×Time as a relative topos
- 4 展望とお願い

今後の展望 この話はまだまだ荒い！

- ▶ **Sheaf condition:** GoL を含む最小の site $(\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{Z}^2) \rtimes_{\text{Int}} \mathbb{N}, J)$
- ▶ **Logic:** (冪等でない様相演算子で) 「ライダーが右上に動く」を定式化
- ▶ **Symmetry:** 対称性 $\mathbb{Z}^2 \rtimes D_4$ で割る
- ▶ **Smooth version:** 波動方程式を $\text{SmoothSet}^{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ -relative topos で捉える



遠いモチベーション: 進化論の数理モデル

進化論の数理モデルでは多くの場合,

- ▶ Population size
- ▶ Gene frequency

などの **数値** を扱う.

しかし, 私が知りたいのは,

「同じものが動いている」

と言えるための個性が, **空間**と **時間発展**しか持たない系から創発することへの数学的理解である.

