

順序集合で遊ぶ Kan 拡張入門

hora-algebra

2024 年 4 月 9 日

圏論の知識を一切仮定せず，順序集合論における Kan 拡張を使って初等的な言葉のみで Kan 拡張のアイデアを伝える．様々な分野からの様々なレベルの例を紹介し，おもちゃのような例を実際に計算することで理解を促す．読者としては，圏論はもちろん現代数学もほぼ知らないような高校生をはじめ，親しみ深い例や奇妙な例を求めている Kan 拡張既修者まで広く想定している．

目次

1	導入：自然な拡張とは何か？	3
2	順序集合論速習	4
3	Kan 拡張の定義	6
4	易しめなおもちゃ	7
5	難しめなおもちゃ	12
6	Kan 拡張の計算公式	15
7	計算公式の興味深い性質	18
8	予想外のおもちゃ	22
9	圏論の紹介：Kan 拡張はもっとすごい！	25

どう読むか，なぜ読むか

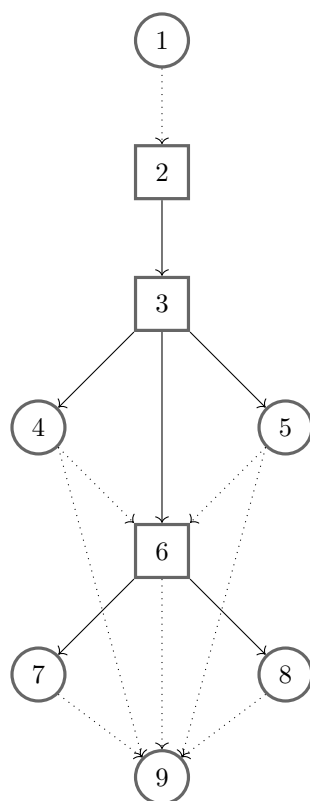
読者は自身の知識に合わせて次のどれかに沿って読むことを勧める．

1. 集合や写像を知らない人も実数から実数への関数を主に扱う 1,4 章を眺めて雰囲気味わうことができる．しかし他の多くの部分を読むことはできない．先に手頃な数学入門書を読むことを勧める．
2. 集合や写像は知っているが現代数学はほぼ知らない人はこの文章を一部の例を除いて全て読むことができる．この文章の基礎となる順序集合論を 2 章で速修できるが，より丁寧な解説をもとめて手頃な教科書を眺めることも選択肢に入れて欲しい．5,8 章は難易度の問題で，7 章はモチベーションの問題で飛

ばしても問題ない.

3. (圏論学習経験の有無に関わらず) 数学を勉強している人はこの文章を全て読むことができる. 2 章の順序集合論の速習は, 記法や用語の確認程度で飛ばしても構わない.
4. Kan 拡張を既に知っている人も想定読者である. もちろん全てを読むことができる. Kan 拡張既修者に向けた例もいくつか用意してある.

各章の依存関係は以下のようにになっている. 丸がお話や具体例パートで, 四角が理論パートを表す. 濃い矢印は論理的な依存関係を, 点線矢印はモチベーション上の依存関係を表す.



各章の説明をする. 1,9 章はお話パートで, 2,3,6 章は理論パートで, 4,5,7,8 章は具体例パートになっている. 具体例パート (4,5,7,8 章) がこの文章で重視した章だが, 同時に読者の知識やモチベーションによっては適切に読み飛ばされることを想定した章でもある.

1 章では全員に向けて指数関数の拡張を例に, 拡張問題になぜ順序集合が関係するかを説明する. 1 章により, 2 章以降の議論のモチベーションを明確にする. 2 章では順序集合を知らない読者に向けてこの文章の基礎となる順序集合論を速修する. 3 章では全員に向けてこの文章のメインピックである (順序集合における) Kan 拡張の定義を述べる. 4 章では全員に向けて主に実数から実数への関数のような高校数学的な例を紹介し, それらを通して Kan 拡張の基本性質に触れる. 5 章では数学を勉強している読者に向けて, 位相空間や測度空間などの学部の数学科で習うような例を紹介する. 複数の分野からの例を提示することで Kan 拡張が様々な場面で現れていることを実感してもらいたい. 6 章では全員に向けて Kan 拡張の計算公式を紹介する. 5 章までに紹介した全ての Kan 拡張を統一的に計算する方法を得る. 7 章では一部の意欲的な読者に向けて, Kan 拡張の理論的な性質についての演習を挙げる. 圏論における Kan 拡張で一般に成立する定理を順序集合

に落とし込んだものを挙げ、一般の場合と同様の証明を与える。Kan 拡張既修者にとっては良い復習に、今後圏論の Kan 拡張を勉強する意思のある読者にとっては良い予習になると信じている。8 章では全員に向けて、6 章の計算公式を知っていることを前提にちょっと変わった Kan 拡張を紹介する。9 章では圏論における Kan 拡張について軽く紹介し、その役割について言及する。

1 導入：自然な拡張とは何か？

部分的に定義された関数を拡張したいことはよくある。例えば高校数学では、有理数上で定義された指数関数 $2^q : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ を実数上の関数 $2^r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に拡張することを考えた。図式で書けば次の点線を作ることに対応する。ここで ι は単なる埋め込み写像である。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{2^q} & \mathbb{R} \\ & \searrow \iota & \nearrow \text{---} \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

普通の拡張は実数 r について、 r に収束する有理数列 $q_1, q_2, \dots \rightarrow r$ を取り $2^r := \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{q_n}$ と定めていた。この普通の拡張は、可能なただ一つの拡張ではないことに注意したい。実際、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{2^q} & \mathbb{R} \\ & \searrow \iota & \nearrow f \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

を可換にする (つまり 2^q を拡張する) 関数 f は無理数での値を好きに変更しても再び条件を満たし、よってそのような f は無数に存在する。普通の拡張 2^r は数ある拡張の一つに過ぎない。このように、残念ながら写像の自然な拡張は存在しない^{*1}。

普通の拡張 2^r が自然な拡張であることを主張したければ、 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ を単に集合とみなすだけでは不十分である。一つの解決策は、 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ を大小関係という順序の構造も含めて考えることである。 f として順序を保つもの (広義単調増加なもの) のみを許せば、普通の拡張 2^r は唯一の拡張になる^{*2}。

このように、自然な拡張を得ようという目的においては、単に集合と写像を考えるのでは不十分である。集合の元の間の関係まで考慮すれば、自然な拡張が得られるかもしれない。

自然な拡張を探す問題の枠組みは、順序集合と順序を保つ写像の理論がふさわしそうだ。順序の理論では自然な拡張は存在するかもしれない!

Remark 1.1 (圏論). 集合の元の間の関係性として順序より豊かな構造を扱いたければ、順序集合の一般化として圏というものを考えられる。Kan 拡張は圏論の枠組みで語られるのが (少なくとも 2021/11 の私の知る限り) 普通である。このことは 9 章でもう少し詳しく述べる。

^{*1} 数学的な主張は Kan 拡張の定義の後に Example 4.4 で行う。

^{*2} 極限を保たせるという 2^r の定義からも示唆されるように、 f に連続性を課することも一つの解決策である。しかし、順序構造は至る所に現れるため一般性が非常に高いというメリットがある。実は極限の保存という手法さえも、後に見る Kan 拡張の計算公式の基本的なアイデアになる!

2 順序集合論速習

順序集合論の基本的な定義を述べる.

Definition 2.1 (順序集合). 順序集合とは集合 X と二項関係 $\leq$ の組 $(X, \leq)$ で, 以下の三つの条件を満たすものをいう.

- 任意の $x \in X$ について $x \leq x$
- 任意の $x, y, z \in X$ について $x \leq y$ かつ $y \leq z$ なら $x \leq z$
- 任意の $x, y \in X$ について $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$

これらの3つの条件は, 上から順に反射律, 推移律, 反対称律と呼ばれている.

Example 2.2 (整数, 有理数, 実数). 整数の集合 $\mathbb{Z}$, 有理数の集合 $\mathbb{Q}$, 実数の集合 $\mathbb{R}$ は普通の大小関係 $\leq$ で順序集合になる.

Example 2.3 (冪集合). 集合 A について, A の冪集合 (部分集合全体の集合) $\mathcal{P}(A)$ は包含関係 $\subset$ で順序集合になる.

Example 2.4 (自明な順序). どんな集合 X についても, 任意の $x, y \in X$ について $x \leq y \iff x = y$ とすることで順序集合になる. これを自明な順序という.

Exercise 2.5 (剰余関係). 非負整数の集合 $\mathbb{N}$ は剰余関係 $\mid$ で順序集合になることを確認せよ.

Exercise 2.6 (人間関係!). 厳密ではない演習を一つ挙げておく. 人間の集合を P とする. P 上の二項関係 $\leq$ を, $p \leq q$ を以下のようにして定める. どれが順序になるか考えよ. 順序にならないものは反射律, 推移律, 反対称律のうちどれが成り立たないのかを答えよ.

1. p は q の子孫である.
2. p は q の子孫であるか, $p = q$ である.
3. p と q はお互いのことを知っている.
4. p は q のことを好意的に思っている.
5. p から知り合いを有限回辿ることで q に到達できる.
6. p と q は同じ年である.

順序集合 $(P, \leq)$ を, 今後は二項関係を略して P と書いてしまう. これは数学でよくある便利だが不適切な慣習である.

Definition 2.7 (順序保存写像). 順序集合 P, Q について, P から Q への写像 $f: P \rightarrow Q$ が順序保存写像であるとは, 任意の $x, y \in P$ について

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

なることをいう.

Example 2.8 (実数での例). 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が順序保存写像であることと広義単調増加関数であることは同値である. $f(x) = x$ や $f(x) = 0$ や $f(x) = 2^x$ は順序保存写像だが $f(x) = -x$ や $f(x) = 2^{-x}$ や

$f(x) = \sin(x)$ は順序保存写像ではない.

Definition 2.9 (順序保存写像の大小). 順序集合 P, Q と P から Q への順序保存写像 $f, g : P \rightarrow Q$ について, $f \leq g$ を

$$\text{任意の } p \in P \text{ について } f(p) \leq g(p)$$

と定める.

Example 2.10 (実数での例). $f(x) = x + 2$, $g(x) = x + 3$ なら $f \leq g$ であるが, $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$ なら $f \leq g$ でも $g \leq f$ でもない.

Exercise 2.11 (順序保存写像全体の順序集合). 順序集合 P, Q について, P から Q への順序保存写像全体の集合 Q^P は順序保存写像の大小 $\leq$ で順序集合になることを確かめよ.

Definition 2.12 (最小元, 最大元). 順序集合 P の元 $p \in P$ について, p が P の最小元であるとは

$$\text{任意の } q \in P \text{ について } p \leq q$$

となることをいい, p が P の最大元であるとは

$$\text{任意の } q \in P \text{ について } q \leq p$$

となることをいう.

Example 2.13 (実数での例). $\mathbb{R}$ には最大元も最小元も存在しない.

Example 2.14 (非負整数での例). $\mathbb{N}$ では 0 が最小元である. 最大元は存在しない.

最小元と最大元は互いの逆の概念である. このように互いに逆になっている概念を双対的な概念という. (この文章における) 双対という言葉についてももう少しともに説明しておく. 順序集合 $(P, \leq)$ について, 順序を逆にした $(P, \geq)$ も順序集合になる. この順序を逆転させた順序集合における概念 C は P における C の双対概念であると言われる.

2章でここまで述べてきた知識のみでいくつかの具体例を除いて5章までと9章を読める. 6,7,8章を読むには次の知識が必要になる.

Definition 2.15 (上界, 下界). 順序集合 P とその部分集合 $S \subset P$ について, $p \in P$ が S の上界であるとは

$$\text{任意の } s \in S \text{ について } s \leq p$$

なることをいう. $p \in P$ が S の下界であるとは

$$\text{任意の } s \in S \text{ について } p \leq s$$

なることをいう.

上界と下界も双対である. 任意の元は空集合の上界でもあり, 下界でもあることに注意.

Definition 2.16 (sup, inf). 順序集合 P とその部分集合 $S \subset P$ について, S の sup(上限) とは S の上界のうち最小のものをいう. S の inf(下限) とは S の下界のうち最大のものをいう.

sup と inf も双対である. 上界のうち最小, 下界のうち最大というアイデア自体は小学校で次を習っている.

Example 2.17 (最小公倍数, 最大公約数). 非負整数と剰余関係の順序集合 $(\mathbb{N}, |)$ について, $\{12, 18, 30\}$ の $\sup$ は 180 であり, $\inf$ は 6 である. 一般に $S \subset \mathbb{N}$ の $\sup$ は S の元たちの最小公倍数で $\inf$ は最大公約数である.

Example 2.18 (和集合と共通部分). 集合 A について, A の冪集合 (部分集合全体の集合) $\mathcal{P}(A)$ を包含関係 $\subset$ で順序集合とみなしたものを $(\mathcal{P}(A), \subset)$ を考える. $\mathcal{P}(A)$ の部分集合 $S \subset \mathcal{P}(A)$ (A の部分集合の集合!) について, S の $\sup$ は S の元 (A の部分集合) たちの和集合であり, $\inf$ は S の元 (A の部分集合) たちの共通部分である.

Example 2.19 (実数での例). $\mathbb{R}$ の部分集合 $S = \{x \in \mathbb{Q}(\subset \mathbb{R}) \mid x^2 \leq 2\}$ の上限は $\sqrt{2}$ であり下限は $-\sqrt{2}$ である. 一方, $\mathbb{Q}$ の部分集合としてみた $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ には上限も下限も存在しない.

Remark 2.20 (圏論との対応). 圏論を知っている読者のために, 2 章で述べた順序集合の概念と圏論の概念の対応を明示しておく.

順序集合 $\leftrightarrow$ 圏
 順序保存写像 $\leftrightarrow$ 関手
 順序保存写像の大小 $\leftrightarrow$ 自然変換
 最小元, 最大元 $\leftrightarrow$ 始対象, 終対象
 上限, 下限 $\leftrightarrow$ 余極限, 極限

右に書いた圏論の概念は, 圏として順序集合のみを考えるとときには, 左に書いた順序集合の概念とちょうど一致する.

3 Kan 拡張の定義

この章ではまず Kan 拡張の定義を述べる. 定義に出てくる hg は写像の合成である.

Definition 3.1 (Kan 拡張). 順序集合 P, Q, R と順序保存写像 $f : P \rightarrow R, g : P \rightarrow Q$ について, f の g に沿った左 Kan 拡張とは, $f \leq hg$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g \quad \wedge \mid \quad \nearrow h & \\ & Q & \end{array}$$

なる順序保存写像 $h : Q \rightarrow R$ のうち最小のものである. f の g に沿った左 Kan 拡張を $\text{Lan}_g f : Q \rightarrow R$ と書く. f の g に沿った右 Kan 拡張とは, $f \geq hg$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g \quad \vee \mid \quad \nearrow h & \\ & Q & \end{array}$$

なる順序保存写像 $h : Q \rightarrow R$ のうち最大のものである. f の g に沿った右 Kan 拡張を $\text{Ran}_g f : Q \rightarrow R$ と書く.

少しだけ口語的に言えば左 Kan 拡張 h は, f を上 (大きい方) から抑える $f \leq hg$ ことができる程度には大きいことが要求されているが, その要求を満たすものの中では最小のものとして定義されている. 双対的に, 右 Kan 拡張 h は, f を下から抑える $f \geq hg$ ことができる程度には小さいことが要求されているが, その要求を満たすものの中では最大のものとして定義されている. もちろんこの定義は具体例を用いて解きほぐす必要があるが, それは後の章に任せて一旦いくつかの注意をしておく.

定義を書き換えれば, f の g に沿った左 Kan 拡張とは順序保存写像 $\text{Lan}_g f : Q \rightarrow R$ であって,

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g \quad \swarrow \text{Lan}_g f & \\ & Q & \end{array} \quad \wedge \mid$$

を満たし, かつ任意の順序保存写像 $h : Q \rightarrow R$ について

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g \quad \swarrow h & \\ & Q & \end{array} \quad \wedge \mid \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g \quad \swarrow \text{Lan}_g f & \\ & Q & \end{array} \quad \wedge \mid \quad \begin{array}{c} \nearrow h \\ \nwarrow \end{array}$$

なるものをいう.

Kan 拡張は最大元および最小元として定義されているから存在すれば一意である^{*3}. したがって, 「 $\sim$ とは $\sim$ の $\sim$ に沿った左 Kan 拡張と定める」のような定義は存在証明さえすれば曖昧さなく使える.

Kan 拡張は, 存在するとは限らない. このことの例は後に見る. 好意的に捉えれば, **存在してほしいときにはちゃんと存在しない**とも言えるかもしれない. このポジティブな解釈は次の章で具体例を通して同意してもらえるものだと思っている.

Kan 拡張の定義においては本当の拡張になること $f = (\text{Lan}_g f) \circ g$ は要求されていない. 後に見るように, Kan 拡張は一般には本当の拡張にはならない^{*4}. この意味で不等号 $f \leq (\text{Lan}_g f) \circ g$ は**不可避な誤差**を表しているとも捉えられる. 良く言えば, 本当の拡張が存在しないときでも Kan **拡張は拡張の最適近似**を探してくれる.

また (順序集合論や圏論ではいつもそうであるように) 双対的に二つの拡張, つまり左 Kan 拡張と右 Kan 拡張, が考えられることにも注意してもらいたい. 次の節から例を見ていく.

Remark 3.2 (圏論の Kan 拡張との関係). 順序集合の Kan 拡張は, 圏論の Kan 拡張の単なる類似ではなく特別な場合である.

4 易しめなおもちゃ

この章では, 主に実数や有理数を使った簡単で直感的な例を通して定義を解きほぐし, Kan 拡張のアイデアや性質に慣れ親しんでもらいたい. Kan 拡張であることの確認はできればして欲しいが, 難しければ今神経質になりすぎる必要はない. 8 章以外の章の Kan 拡張は 6 章で与えられる Kan 拡張の計算公式で全て容易にチェックできる.

^{*3} 圏論版では, 他の普遍性と同様に存在すれば標準的な同型を除いて一意である.

^{*4} 本当の拡張になるための便利な十分条件が知られている.

モチベーション回収

Example 4.1 (指数関数の拡張). 1 章で導入に使った指数関数の例が本当に Kan 拡張であることを確認しよう. Kan 拡張の定義 (Definition 3.1) における P は有理数のなす順序集合 $\mathbb{Q}$ であり, Q, R は $\mathbb{R}$ である. $2^q : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\iota : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ (単なる埋め込み) に沿って拡張する.

順序保存写像 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ であって,

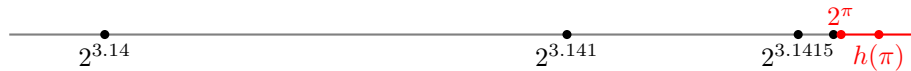
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{2^q} & \mathbb{R} \\ & \searrow \iota \quad \wedge \mid \quad \nearrow h & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

(つまり $\forall q \in \mathbb{Q}, 2^q \leq h(q)$) なるものの中で最小のものが左 Kan 拡張である. これは普段の $2^r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ であることを説明する. 実際, $\forall q \in \mathbb{Q}, 2^q \leq h(q)$ なる任意の順序保存写像 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $2^r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 以上になることは次のように説明できる.

詳細な証明を書くより, $r = \pi$ のときに $2^\pi \leq h(\pi)$ となることを納得してもらおう. π へ (下から) 収束する有理数列 $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415 \dots$ を考える. そして

$$\begin{aligned} 2^3 &\leq h(3) \leq h(\pi) \\ 2^{3.1} &\leq h(3.1) \leq h(\pi) \\ 2^{3.14} &\leq h(3.14) \leq h(\pi) \\ 2^{3.141} &\leq h(3.141) \leq h(\pi) \\ 2^{3.1415} &\leq h(3.1415) \leq h(\pi) \\ &\vdots \end{aligned}$$

という列を考えると, $2^\pi \leq h(\pi)$ が分かる.



この議論を精密に見れば, 普段の $2^r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が左 Kan 拡張になっていることを確認できる.

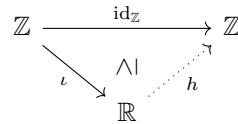
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{2^q} & \mathbb{R} \\ & \searrow \iota \quad \wedge \mid \quad \nearrow 2^r = \text{Lan}_\iota 2^q & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

同様に, 右 Kan 拡張も 2^r である. 今回のケースでは二つの双対的な拡張, 左 Kan 拡張と右 Kan 拡張, は一致している. 1 章では単に写像として拡張しようとする自然な拡張は得られないことを説明した. 集合と写像といった等式 $=$ の言葉でなく, 順序集合と順序保存写像という不等号 $\leq$ (さらには一般の圏における射) の言葉で拡張を議論した結果うまくいったのである!

左右の Kan 拡張の不一致

双対的な二つの拡張が一致しない例として, 多くの読者は既に床関数と天井関数を知っている.

Example 4.2 (床関数と天井関数 (実数の整数近似)). 今度は, $\text{id}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を埋め込み $\iota : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ に沿って拡張しよう. つまり, 実数から整数を得る自然な方法は何か? を考える. 実数の自然な整数近似は何か? と言ってもよい.



なる最小の h , つまり ι に沿った $\text{id}_{\mathbb{Z}}$ の左 Kan 拡張は床関数 $\lfloor \cdot \rfloor$ である. 双対的に右 Kan 拡張は天井関数 $\lceil \cdot \rceil$ である.

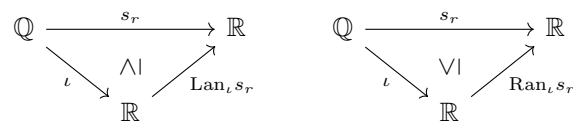


このように左右の Kan 拡張は必ずしも一致しない.

Exercise 4.3 (実数値関数の最大拡張). 実数 $r \in \mathbb{R}$ について, 順序保存写像 $s_r : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$s_r(q) := \begin{cases} 1 & (q \geq r) \\ 0 & (q < r) \end{cases}$$

と定める. 埋め込み $\iota : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ に沿った s_r の左右の Kan 拡張 $\text{Lan}_{\iota} s_r, \text{Ran}_{\iota} s_r$ を考える.

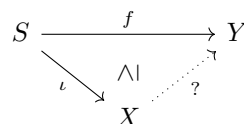


1. 左右の Kan 拡張が存在することを示せ.
2. 左右の Kan 拡張が一致する ($\text{Lan}_{\iota} s_r = \text{Ran}_{\iota} s_r$) ための $r \in \mathbb{R}$ についての必要十分条件を求めよ.

Kan 拡張の非存在

また, Kan 拡張はそもそも存在するとは限らない. Kan 拡張が存在しない例もいくつか挙げておく.

Example 4.4 (写像の自然な拡張は存在しない). 1 章で「写像の自然な拡張は存在しない」と主張した. この直感的な事実は次のように定式化できる. 集合 X とその部分集合 S を考える. S から集合 Y への写像 $f : S \rightarrow Y$ を X 上に拡張したい. 集合を自明な順序で順序集合とみなす. 埋め込み $\iota : S \rightarrow X$ に沿った f の (左)Kan 拡張



は自明な場合 ($S = X$ か Y が一点の場合) を除いて存在しない.

Exercise 4.5 (実数の自然な有理数近似は存在しない). Example 4.2 を真似して, $\text{id}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ の埋め込み

$\iota: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ に沿った Kan 拡張を考えてみる．つまり，実数の自然な有理数近似は何か?を考えることになる．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{Q}}} & \mathbb{Q} \\ & \searrow \iota \quad \wedge \quad \nearrow ? & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

1. 正整数 $n \geq 1$ について, $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ を $h_n(x) := \frac{\lceil nx \rceil}{n}$ と定めると h_n は順序保存写像であり,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{Q}}} & \mathbb{Q} \\ & \searrow \iota \quad \wedge \quad \nearrow h_n & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

を満たすことを示せ．

2. 実数の自然な有理数近似 (ι に沿った $\text{id}_{\mathbb{Q}}$ の左 Kan 拡張 $\text{Lan}_{\iota} \text{id}_{\mathbb{Q}}$) は存在しないことを示せ．

順序構造への依存

Kan 拡張の定義では当然ながら順序構造が本質的である．順序構造が変わると Kan 拡張が変わることの簡単な例を紹介する．

Example 4.6 (ディリクレの関数). $\mathbb{Q}$ から $[0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ への順序保存写像 $c_1: \mathbb{Q} \rightarrow [0, 1]$ を $c_1(q) = 1$, つまり 1 への定数関数として定義する．このとき, 埋め込み $\iota: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ に沿った c_1 の左 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{c_1} & [0, 1] \\ & \searrow \iota \quad \wedge \quad \nearrow \text{Lan}_{\iota} c_1 & \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

は $\mathbb{R}$ から $[0, 1]$ への 1 を取る定数関数 $(\text{Lan}_{\iota} c_1)(x) = 1$ である．一方, $[0, 1]$ の順序は普通のままで, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ の順序を自明な順序に変更した場合, $\text{Lan}_{\iota} c_1$ はディリクレの関数

$$(\text{Lan}_{\iota} c_1)(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

となる．

順序構造が大切だと言った直後で混乱を招くかもしれないが, 実は順序集合の Kan 拡張では P (一番定義域側にいる順序集合) の順序は本質的には使っていない*5. このことを示す演習を挙げておく．

Exercise 4.7 (P の順序への非依存). (順序集合の) Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g \quad \wedge \quad \nearrow \text{Lan}_g f & \\ & Q & \end{array}$$

*5 圏の Kan 拡張の場合は重要である．今回は順序構造を考えているため, 圏として見れば任意の図式が可換になっており, 自然変換の自然性が自明になっている

について、 P 上の順序を f, g が順序保存写像になる範囲で変更しても $\text{Lan}_g f$ は変わらず左 Kan 拡張であることを示せ。特に、 P に自明な順序を入れても左 Kan 拡張である。

本当の拡張ではない例

ここまで挙げた Kan 拡張は全て本当の拡張になっていた。言い換えれば、不可避な誤差を表す不等式 $f \leq (\text{Lan}_g f) \circ g$ は等式であった。ここからは Kan 拡張が本当の拡張にはなっていない例を見ていく。さらに、不可避な誤差 $f \leq (\text{Lan}_g f) \circ g$ が慣れ親しんだ不等式になっていることも確認してもらう。

Example 4.8 (量子化 $\exists, \forall$). 順序集合 Ω を $\Omega = \{\text{真}, \text{偽}\}$ なる集合の上で $\text{偽} \leq \text{真}$ という不等号で定義する。真偽値と論理的包含関係 $\Rightarrow$ (「ならば」) に関する順序集合といっても同じことである。集合 X に自明な順序を入れたとき、全ての写像 $X \rightarrow \Omega$ は順序保存写像である。したがって順序保存写像 $X \rightarrow \Omega$ と「各元に真か偽を対応させる対応」は一对一に対応する。この視点をもって、順序保存写像 $X \rightarrow \Omega$ のことを X 上の命題と呼ぶことにする。集合 X, Y について、 $X \times Y$ 上の命題は 2 変数の命題と捉えることができる。

では、命題の変数の個数を減らす自然な方法は存在するだろうか。つまり $X \times Y$ 上の命題 $\phi : X \times Y \rightarrow \Omega$ が与えられたとき、第一成分射影 $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ に沿った Kan 拡張は存在するだろうか。

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\phi} & \Omega \\ & \searrow \pi_1 \quad \swarrow ? & \\ & X & \end{array}$$

実は、

$$x \mapsto \exists y \in Y, \phi(x, y)$$

が左 Kan 拡張を与える。この左 Kan 拡張を $\exists y \in Y, \phi(-, y)$ と書く。 $\exists y \in Y, \phi(x, y)$ は「ある $y \in Y$ が存在して $\phi(x, y)$ が真」という意味である。不可避な誤差 $\phi \leq (\exists y \in Y, \phi(-, y)) \circ \pi_1$ は $(x_0, y_0) \in X \times Y$ ごとの

$$\phi(x_0, y_0) \implies \exists y \in Y, \phi(x_0, y)$$

である。ここでの $\implies$ は論理的包含関係 (「ならば」) である。不可避な誤差を口語的に言えば、「組 (x_0, y_0) が条件 ϕ を満たす」ならば「ある y が存在して組 (x_0, y) は条件 ϕ を満たす」 ($y = y_0$ とすればいいので!) という論理的な主張のことである。

この左 Kan 拡張が本当の拡張になるのは 2 変数命題 ϕ の真偽が第 2 変数に依存せず第 1 変数のみによって定まるときである。双対的に、 $x \mapsto \forall y \in Y, \phi(x, y)$ が右 Kan 拡張を与え、不可避な誤差は $(x_0, y_0) \in X \times Y$ ごとの

$$\forall y \in Y, \phi(x_0, y) \implies \phi(x_0, y_0)$$

である。命題の変数を減らす 2 つの自然な方法は $\exists$ と $\forall$ である。この例の詳しい話は [4] の 9.5 節や [3] の 1.9 節などを見るとよい。

6 章以降で本質的な役割を果たす $\sup$ と $\inf$ も (一般には) 本当の拡張ではないような重要な Kan 拡張の例である。

Example 4.9 ($\sup$ と $\inf$). 元をちょうど 1 つ持つ順序集合を $\mathbf{1}$ と書く。 $\mathbf{1}$ から (順序) 集合 R への (順序保存) 写像は像を見ることで R の元と一对一に対応する。順序集合 R とその部分集合 $S \subset R$ と $r \in R$ につ

いて、 r が S の $\sup$ であることは、 r に対応する (順序保存) 写像 $[r] : \mathbf{1} \rightarrow R$ が一意な (順序保存) 写像 $! : S \rightarrow \mathbf{1}$ に沿った埋め込み $\iota : S \rightarrow R$ の左 Kan 拡張であること

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\iota} & R \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathbf{1} & \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge | \\ ! \quad [r] \end{array}$$

と同値である。双対的に $\inf$ は右 Kan 拡張として定義できる。したがって、順序集合の部分集合から元を得る 2 つの自然な方法は $\sup$ と $\inf$ である。 unavoidable 誤差は $s \in S$ ごとの $s \leq \sup S$ と $\inf S \leq s$ である。この Kan 拡張が本当の拡張になるのは S が元を高々 1 つしか持たないときである。

Example 4.10 (逆像). 写像 $f : X \rightarrow Y$ について、順像をとる順序保存写像 $f(-) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ を考える。考える順序は包含関係によるものである。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{P}(X)}} & \mathcal{P}(X) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{P}(Y) & \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge | \\ f(-) \quad f^{-1} \end{array}$$

逆像をとる順序保存写像 f^{-1} が $\text{id}_{\mathcal{P}(X)}$ の $f(-)$ に沿った左 Kan 拡張である。 unavoidable 誤差は $S \subset X$ ごとの

$$S \subset f^{-1}(f(S))$$

なる包含関係である。言い換えれば、 f での送り先が等しいような X の元たちは区別できなくなると言っている。この左 Kan 拡張が本当の拡張になるのは f が単射なときである。

5 難しめなおもちゃ

少し前提知識が必要な具体例も一部の読者に向けて挙げておく。以下の分野における Kan 拡張は一般の圏を考えてこそ本領を発揮するのだが、順序集合の中でも例を見つけることができる。

位相空間

Example 5.1 (内部). 位相空間 X について、 X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ と X の開集合全体の集合 $\mathcal{O}(X)$ を考える。 $\mathcal{P}(X), \mathcal{O}(X)$ は共に包含関係で順序集合とみなす。このとき、埋め込み ι に沿った $\text{id}_{\mathcal{O}(X)}$ の左 Kan 拡張は何か？つまり、部分集合の開集合による最適近似は何か？を考える。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X) & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{O}(X)}} & \mathcal{O}(X) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{P}(X) & \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge | \\ \iota \quad \text{Int} \end{array}$$

期待通り、内部 (開核) $\text{Int} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ が求める Kan 拡張である。

右 Kan 拡張については演習にしておく。

Exercise 5.2 (開集合族への右 Kan 拡張). Example 5.1 の状況で以下を示せ。

1. 右 Kan 拡張も存在することを示せ.
2. 左右の Kan 拡張が一致するためには X が T_1 空間であることが必要十分であることを示せ.

集合演算

ここで紹介する集合演算の例は, [6] に一般論と圏論との関係が書いてある.

Exercise 5.3 (各種の閉包作用素). 集合 X とその冪集合 $\mathcal{P}(X)$ と $\mathcal{P}(X)$ の部分順序集合 $\mathcal{B}$ を考える. このとき, 埋め込み $\iota: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ に沿った $\text{id}_{\mathcal{B}}$ の右 Kan 拡張を考えたい^{*6}.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{B}}} & \mathcal{B} \\ & \searrow \iota & \nearrow f \\ & \mathcal{P}(X) & \end{array} \quad \begin{array}{c} \vee | \\ \hline \end{array}$$

1. X が線型空間 (群, モノイド, 束, 環など他の代数構造でもよい) で $\mathcal{B}$ が部分線型空間 (対応して他の部分代数でもよい) 全体の集合なら, 部分線型空間 (対応して部分代数) の生成が右 Kan 拡張を定めることを示せ.
2. X が $\mathbb{R}^2$ で $\mathcal{B}$ が凸部分集合全体の集合なら, 凸包を取る操作が右 Kan 拡張を定めることを示せ.
3. X が位相空間で $\mathcal{B}$ が X の閉集合全体なら, 閉包作用素が右 Kan 拡張を定めることを示せ.

Exercise 5.4 (存在量化子と順像). 集合 X の部分集合 $S \subset X$ は X 上の命題 $\chi_S: X \rightarrow \Omega$ と

$$\chi_S(x) = \text{真} \iff x \in S$$

によって対応する. Example 4.8 における写像 $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ を一般の写像 $g: X \rightarrow Y$ に置き換えたものを考える.

1. 左 Kan 拡張は対応する部分集合の言葉で書けば順像になっていることを確認せよ.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi_S} & \Omega \\ & \searrow g & \nearrow \chi_{g(S)} \\ & Y & \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge | \\ \hline \end{array}$$

2. 右 Kan 拡張に対応する部分集合^{*7}を書き下せ.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi_S} & \Omega \\ & \searrow g & \nearrow \chi_{g_!(S)} \\ & Y & \end{array} \quad \begin{array}{c} \vee | \\ \hline \end{array}$$

測度論

測度論における幾つかの重要な定義は Kan 拡張の言葉で記述されることを紹介する.

^{*6} 一般には存在するとは限らない

^{*7} nLab <https://ncatlab.org/nlab/show/internal+logic> では dual image と呼ばれているもの

Example 5.5 (測度空間上の積分). 測度空間上の積分を定義する際、非負値単関数の積分から非負値可測関数の積分への拡張は本質的なステップの一つであった。この拡張問題も Kan 拡張の例である。測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ について、非負値可測関数と関数の大小関係のなす順序集合 Mea_X を考える。積分 $\int d\mu : \text{Mea}_X \rightarrow [0, \infty]$ は、非負値単関数と関数の大小関係のなす順序集合 Sim_X からの埋め込み $\iota : \text{Sim}_X \rightarrow \text{Mea}_X$ に沿った単関数の積分 $\int d\mu : \text{Sim}_X \rightarrow [0, \infty]$ の左 Kan 拡張である。

$$\begin{array}{ccc} \text{Sim}_X & \xrightarrow{\int d\mu} & [0, \infty] \\ & \searrow \iota & \nearrow \int d\mu \\ & \text{Mea}_X & \end{array} \quad \wedge \mid$$

順序保存写像 $f : P \rightarrow R$ の Kan 拡張を考える際はどんな $g : P \rightarrow Q$ に沿って拡張するかをこちらで指定する。特に Kan 拡張 $\text{Lan}_g f : Q \rightarrow R$ の定義域 Q はこちらで指定する。したがって「可能な限り広い定義域へ拡張したい」という類の拡張問題とは相性が悪そうに思える。しかし、**左右の Kan 拡張両方を利用することで可能な限り広い定義域を得ることも考えられる**。具体的に言えば、左右の Kan 拡張が一致する範囲に制限したものを最大拡大と考えるのである^{*8}。自然な拡張概念は双対的な 2 つの Kan 拡張だが、どうしても 1 つの拡張が欲しいという場合はその共通部分をとる、というアイデアとも言える。

Example 5.6 (測度空間の完備化). 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ について、 $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ は順序保存写像である。 μ を X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ のうち可能な限り広い部分へ拡張したい。そこで、まず埋め込み $\iota : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ に沿った μ の左右の Kan 拡張を考える。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\mu} & [0, \infty] \\ & \searrow \iota & \nearrow \text{Lan}_\iota \mu \\ & \mathcal{P}(X) & \nearrow \text{Ran}_\iota \mu \end{array}$$

そして、 $\text{Lan}_\iota \mu$ と $\text{Ran}_\iota \mu$ が一致する部分 $\bar{\mathcal{B}} \subset \mathcal{P}(X)$ に $\text{Lan}_\iota \mu$ と $\text{Ran}_\iota \mu$ を制限したものを $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow [0, \infty]$ とする。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\mu} & [0, \infty] \\ & \searrow \iota & \nearrow \text{Lan}_\iota \mu \\ & \mathcal{P}(X) & \nearrow \text{Ran}_\iota \mu \\ & \nwarrow & \nearrow \\ \bar{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & [0, \infty] \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

このとき、 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ が有限 $\mu(X) < \infty$ なら^{*9} $(X, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ は測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の完備化になっている。

この測度空間の例を確認する演習は、計算公式を獲得した 6 章以降に回す。ここでは定義の形だけから簡単に確認できることだけ演習にしておく。

Exercise 5.7 (測度の最大拡大は完備). Example 5.6 で定義された $(X, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ を考える。 $\bar{\mu}(N) = 0$ なる $N \in \bar{\mathcal{B}}$ について、 N の任意の部分集合 $S \subset N$ は $S \in \bar{\mathcal{B}}$ かつ $\bar{\mu}(S) = 0$ を満たすことを示せ。

^{*8} 圏論を知っている人に向けて圏論の言葉で言えば、測度 μ の完備化は $\text{Lan}_\iota \mu$ と $\text{Ran}_\iota \mu$ の、圏の圏 Cat における (一般性は失われるが、順序集合の圏 Poset や集合の圏 Set でもいい) equalizer であると言える。

^{*9} 測度空間が有限でないときもだいたい完備化になるのだが、 ∞ のところでズレがおきる (測れすぎる)。 $\bar{\mu}(S) = \infty$ なら S より大きい集合 $S \subset S'$ についても $\bar{\mu}(S') = \infty$ となる。一見合理的だが、 $\bar{\mathcal{B}}$ の σ -加法性が失われるかもしれない。

6 Kan 拡張の計算公式

ここまでに出した Kan 拡張の例を全て含め、この文章におけるほぼ全ての Kan 拡張は本質的に同じ方法 (すぐに紹介する Theorem 6.1) で構成できる。このことを観察するため、指数関数の例

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{2^q} & \mathbb{R} \\ & \searrow \iota & \nearrow 2^r = \text{Lan}_\iota 2^q \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

に立ち返ろう。 2^r という自然な拡張 (左右の Kan 拡張) は 1 章でも復習したように r へ収束する有理数列 $q_1, q_2, \dots \rightarrow r$ を一つ取り、 $2^{q_1}, 2^{q_2}, \dots$ の収束先として定義した。 $r = \pi$ のときで書くと

$$\begin{array}{ccc} 3, 3.1, 3.14, 3.141, \dots & \rightarrow & \pi \\ & \Downarrow & \\ 2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, \dots & \rightarrow & 2^\pi \end{array}$$

などである。この定義では数列の極限の概念が使われているが、順序集合の言葉で次のように書き換えよう。

$$\begin{aligned} 2^\pi &:= \sup_{q \leq \pi} 2^q \\ & (= \sup \{ 2^q \in \mathbb{R} \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q \leq \pi \}) \end{aligned}$$

ここで q は π 以下の有理数全てを渡る。 π へ収束する有理数列を一つ選択するのではなく、 π 以下の有理数を全て考えるのである。

この構成方法は順序集合に一般化できる。

Theorem 6.1 (順序集合における Kan 拡張の計算公式). 順序集合 P, Q, R と順序保存写像 $f : P \rightarrow R$ と $g : P \rightarrow Q$ を考える。

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g & \\ & Q & \end{array}$$

任意の $q \in Q$ について $\sup_{g(p) \leq q} f(p) (\in R)$ が存在するとき、

$$q \mapsto \sup_{g(p) \leq q} f(p)$$

は f の g に沿った左 Kan 拡張を与える。

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g & \nearrow \sup_{g(p) \leq -} f(p) \\ & Q & \end{array}$$

Proof.

主張内で定義された写像 $q \mapsto \sup_{g(p) \leq q} f(p)$ を $l: Q \rightarrow R$ と書くことにする.

まず, l が順序保存写像であることを示す. $q \leq q'$ なら $\{f(p) \mid p \in P \wedge g(p) \leq q\} \subset \{f(p) \mid p \in P \wedge g(p) \leq q'\}$ となるので両辺の $\sup$ をとれば $l(q) \leq l(q')$ がわかる.

次に, $f \leq lg$ を示す. 任意に $p \in P$ をとる. 自明な (不) 等式 $g(p) \leq g(p)$ より,

$$f(p) \leq \sup_{g(p') \leq g(p)} f(p') = l(g(p))$$

となる.

最後に $f \leq hg$ なる任意の順序保存写像 $h: Q \rightarrow R$ について $l \leq h$ なることを示す. 任意に $q \in Q$ をとる. $\sup$ の定義を考えれば, $h(q)$ が $\{f(p) \mid p \in P \wedge g(p) \leq q\}$ の上界となることを示せばよい. $g(p) \leq q$ なる任意の $p \in P$ について, h は順序を保つので $hg(p) \leq h(q)$ となる. また, 仮定より $f(p) \leq hg(p)$ となる. 合わせて $f(p) \leq h(q)$ となる. $\square$

Exercise 6.2 (右 Kan 拡張の計算公式). 双対的に, 必要な $\inf$ が存在すれば右 Kan 拡張は $\inf$ で計算できることを示せ.

この計算公式を口語的に説明しようと試みてみる. まず, (左)Kan 拡張を考える状況では,

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g & \\ & & Q \end{array}$$

の状態から $Q \rightarrow R$ に写像を伸ばしたい. Q の元 q を受け取り, R の元を返したい. もちろん何かの意味で P を経由したいのだが, g の向きを考えれば安直にはうまく書けない.

そこで Kan 拡張の計算公式では, Q の元を受け取り, P の元たちで**型取り**をしてから R へ送る, ということをする! 具体的に言えば, $q \in Q$ を受け取ると,

$$\{p \in P \mid g(p) \leq q\} \subset P$$

という P の部分集合を作る. これは, (g を介して) q より小さい P の元を集めている. これが先ほど言った「型」の役割を果たす. そして, この型を使って R の元を得る. どのようにするかと言えば, 「型」を f で送って

$$\{f(p) \mid p \in P, g(p) \leq q\} \subset R$$

を得た後にこの上限をとるのである. この Q, P, R と移りながら型取りをして再現をする工程が, Kan 拡張の計算公式

$$q \mapsto \sup_{g(p) \leq q} f(p)$$

の正体 (の一つ) である!

もう少し詳しく言えば, この計算公式では「自分以下の元たちの上限 ($\sup$) をとる」という本来であれば自身の再構築になる操作を, 順序集合を移りながら行うことによって自然な拡張を得ているのである. 次の自明な拡張問題を例にそのことを体験して欲しい.

Exercise 6.3 (教育的牛刀割鶏). 順序集合 P について, id_P に沿った id_P の左 Kan 拡張が id_P であること

を Theorem 6.1 を用いて再確認せよ.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\text{id}_P} & P \\ & \searrow \text{id}_P \quad \wedge \mid \quad \nearrow \text{id}_P & \\ & P & \end{array}$$

次の演習は, (Exercise 8.5 と並んで) この文章中で最重要の演習の一つである. ぜひ取り組んで欲しい.

Exercise 6.4 (ここまでの例). この文章にこれまで出てきた Kan 拡張は全てこの公式で計算できる. このことを可能な限り多くの例で確認せよ.

この演習で計算公式の威力をいくらか感じ取ってもらえたと思う. 9 章で触れるように, 圏論の Kan 拡張へ話を広げれば計算公式の適用範囲はさらに (比べ物にならないほど!) 広がる.

Definition 6.5 (各点 Kan 拡張). Theorem 6.1 で計算される Kan 拡張を各点 Kan 拡張 (pointwise Kan extension) という.

Remark 6.6 (計算公式で計算できない Kan 拡張). Example 8.1 で紹介するように, 各点 Kan 拡張でない Kan 拡張も存在する.

しかし, あまり悲観的になる必要もない. ここまでの例が全て各点 Kan 拡張であったことから示唆されるように, **重要な Kan 拡張は各点 Kan 拡張である**という経験則 ($\neq$ 数学的主張) が知られている. [1] の 6.3 節では

By the categorical community's consensus, the important Kan extensions are pointwise Kan extensions.

と書かれている. [5] に至っては (この文章における) Kan 拡張のことを weak Kan extension と呼び, (この文章における) 各点 Kan 拡張のみを Kan extension と呼んだ上で

Our present choice of nomenclature is based on our failure to find a single instance where a weak Kan extension plays any mathematical role whatsoever.

とまで言っている. この経験則の真偽は今後読者一人一人が確かめて欲しい.

Theorem 6.1 の状況において, 順序集合 R がより多くの部分集合について $\sup$ を持つほど左 Kan 拡張は存在しやすい. 極端な場合が次の完備束である.

Definition 6.7 (完備束). 順序集合 P が完備束であるとは, P の任意の部分集合が $\sup$ を持つことを言う^{*10}.

Corollary 6.8 (Kan 拡張の存在定理). R が完備束なら, 任意の順序保存写像 $f : P \rightarrow R, g : P \rightarrow Q$ について各点左 Kan 拡張 $\text{Lan}_g f$ が存在する.

ここまでの例で言えば $\Omega, \mathcal{P}(X), \mathcal{O}(X), [0, \infty]$ や演習における各種閉集合族 (位相空間の閉集合や部分代数や凸集合など) などが完備束である. $\mathbb{R}$ は空集合^{*11}と上に非有界な部分集合についてのみ $\sup$ を持たない.

^{*10} 実は, P の任意の部分集合が $\inf$ を持つこと, と言っても同値になる.

^{*11} 空集合の $\sup$ は最小元だと捉えている

集合を自明な順序で順序集合とみなしたもののや $\mathbb{Q}$ は, $\sup$ を持たない部分集合がたくさんある^{*12}ので Kan 拡張も存在しにくかったのである.

演習として, Corollary 6.8 の逆を紹介しておく.

Exercise 6.9 (Kan 拡張の存在定理の逆). R を順序集合とする. 以下の 3 つの条件が同値なことを示せ. (ヒント: Example 4.9)

1. R は完備束である.
2. 任意の順序保存写像 $f: P \rightarrow R, g: P \rightarrow Q$ について, 各点左 Kan 拡張 $\text{Lan}_g f$ が存在する.
3. 任意の順序保存写像 $f: P \rightarrow R, g: P \rightarrow Q$ について, 左 Kan 拡張 $\text{Lan}_g f$ が存在する.

7 計算公式の興味深い性質

Kan 拡張が本当の拡張になるための十分条件など Kan 拡張の興味深い性質を 6 章の計算公式を前提に紹介する. 他の章に比べて理論的な話が多いため, 興味を持てる演習のみ解けばよい.

この章は圏論の Kan 拡張の学習補助も目的としている. 以下で紹介する性質は圏論における Kan 拡張で一般に成立する定理を順序集合に落とし込んだものである. 演習の形で紹介する証明も一般の場合と同様のものである. しかし, この文章の趣旨から外れないように圏論的背景は (面白くて力強く直感的な理解のためにも非常に重要なのだが) 一言触れるだけで説明しない. 対応する圏論の定理を今後勉強する人は簡単な場合でアイデアに触れておくために, 既に勉強した人は簡単な例によるより良い理解を求めて, 読むことを勧める.

Definition 7.1 (順序集合の埋め込み). 順序保存写像 $f: P \rightarrow Q$ が埋め込みであるとは, 任意の $p, p' \in P$ について

$$p \leq p' \iff f(p) \leq f(p')$$

なることをいう.

対応する圏論の概念は [1] の Definition 1.5.7. (関手の fully faithful) である. ここまで埋め込みと呼んでいた順序保存写像は, 全てこの意味で埋め込みになっている.

Exercise 7.2 (本当の拡張を与える十分条件). 順序保存写像 $g: P \rightarrow Q$ が埋め込みであるとする. このとき, 任意の順序保存写像 $f: P \rightarrow R$ について f の g に沿った各点左 Kan 拡張 $\text{Lan}_g f$ は $f = (\text{Lan}_g f) \circ g$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g & \nearrow \text{Lan}_g f \\ & Q & \end{array} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \end{array}$$

を満たすことを示せ. **埋め込みに沿った各点 Kan 拡張は本当の拡張である.** 対応する圏論の定理は, [1] の Corollary 6.3.9. である.

8 章で, 各点性という仮定が必要なことがわかる例を紹介する.

^{*12} 1 元集合を順序集合とみなしたものは完備束なので例外

Exercise 7.3 (各点性の別定義). 順序集合 R とその元 r について, 順序保存写像 $r \leq - : R \rightarrow \Omega$ を考える. $g : P \rightarrow Q$ に沿った $f : P \rightarrow R$ の右 Kan 拡張 $\text{Ran}_g f$ を考える. 右 Kan 拡張 $\text{Ran}_g f$ が各点であることは, 任意の $r \in R$ について

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \xrightarrow{r \leq -} \Omega \\ & \searrow g \quad \vee \mid \nearrow \text{Ran}_g f & \\ & Q & \end{array} = \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \xrightarrow{r \leq -} \Omega \\ & \searrow g \quad \vee \mid \nearrow \text{Ran}_g f & \\ & Q & \end{array}$$

が再び右 Kan 拡張になることと同値なことを示せ. 対応する圏論の定理は, [1] の Theorem 6.3.7. である.

この別定義を明示的に利用して, 各点性の十分条件を紹介する.

Exercise 7.4 (最小元があれば各点). 右 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g \quad \vee \mid \nearrow \text{Ran}_g f & \\ & Q & \end{array}$$

を考える. R が最小元 0_R を持つなら, この右 Kan 拡張 $\text{Ran}_g f$ は各点 Kan 拡張であることを示したい.

Exercise 7.3 を使うことを考える. 任意に $r \in R$ をとる.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \xrightarrow{r \leq -} \Omega \\ & \searrow g \quad \vee \mid \nearrow \text{Ran}_g f & \\ & Q & \end{array} = \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \xrightarrow{r \leq -} \Omega \\ & \searrow g \quad \vee \mid \nearrow \text{Ran}_g f & \\ & Q & \end{array}$$

が右 Kan 拡張であることを示せばよい. 表記上の混乱を防ぐため, $r \leq - : R \rightarrow \Omega$ のことを $s_r : R \rightarrow \Omega$ と書く. 補助的に, 逆向きの順序保存写像 $t_r : \Omega \rightarrow R$ を

$$\begin{aligned} t_r(\text{真}) &= r \\ t_r(\text{偽}) &= 0_R \end{aligned}$$

と定める.

1. $t_r \circ s_r \leq \text{id}_R$ かつ $\text{id}_\Omega \leq s_r \circ t_r$ であることを示せ^{*13}.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\text{id}_R} & R \\ & \searrow s_r \quad \vee \mid \nearrow t_r & \\ & \Omega & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & R & \\ t_r \nearrow & \vee \mid & \searrow s_r \\ \Omega & \xrightarrow{\text{id}_\Omega} & \Omega \end{array}$$

2. 1 の前半を用い, $hg \leq s_r \circ f$ なる任意の順序保存写像 $h : Q \rightarrow \Omega$ について $t_r hg \leq f$ なることを示せ.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g \quad \vee \mid \nearrow s_r & \\ & Q & \xrightarrow{h} \Omega \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{f} & R & \xrightarrow{\text{id}_R} & R \\ & \searrow g \quad \vee \mid \nearrow s_r & & \vee \mid \nearrow t_r & \\ & Q & \xrightarrow{h} & \Omega & \end{array}$$

^{*13} これを順序集合論ではガロア接続, 圏論では随伴という

3. 2 と右 Kan 拡張 $\text{Ran}_g f$ の定義より $t_r h \leq \text{Ran}_g f$ なることを示せ.

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\text{Ran}_g f} & R \\ & \searrow h \quad \swarrow t_r & \\ & \Omega & \end{array} \quad \begin{array}{c} \vee \\ | \end{array}$$

4. 1 の後半と 3 より $h \leq s_r \text{Ran}_g f$ となることを示せ.

$$\begin{array}{ccccc} Q & \xrightarrow{\text{Ran}_g f} & R & & \\ & \searrow h \quad \swarrow t_r & & \searrow s_r & \\ & \Omega & \xrightarrow{\text{id}_\Omega} & \Omega & \end{array} \quad \begin{array}{c} \vee \\ | \end{array}$$

5. 以上と Exercise 7.3 より, $\text{Ran}_g f$ は各点右 Kan 拡張であることを結論づけよ.

この演習は, [1] では Lemma 6.3.2. により Exercise 6.3.i. を解くことに対応する.

以下の二つの演習の準備として次の順序保存写像を定義しておく.

Definition 7.5 ($y_P : P \rightarrow \mathcal{D}(P)$). 順序集合 P について, 順序集合 $\mathcal{D}(P)$ と順序保存写像 $y_P : P \rightarrow \mathcal{D}(P)$ を以下のように定める.

- P の部分集合 $S \subset P$ が下に閉じているとは, 任意の $p \in S$ について p 以下の P の元は全て S の元になることをいう.
- 下に閉じた P の部分集合とその包含関係のなす順序集合を $\mathcal{D}(P)$ と書く.
- 順序保存写像 $y_P : P \rightarrow \mathcal{D}(P)$ を

$$y_P(p) := \{p' \in P \mid p' \leq p\}$$

で定める.

対応する圏論の概念は (y_P が埋め込みであるという事実も含めると) [1] の Corollary 2.2.8 (前層圏と米田埋め込み) である.

Exercise 7.6 (冪集合の普遍性). 集合 X に自明な順序を入れて順序集合だと思ふ. (順序保存) 写像 $y_X : X \rightarrow \mathcal{D}(X) = \mathcal{P}(X)$ は $y_X(x) = \{x\}$ となっている. $\mathcal{P}(X)$ は完備束 (Remark 6.7 をみよ) である. L を完備束とする. (順序保存) 写像 $f : X \rightarrow L$ について, 順序保存写像 $\hat{f} : \mathcal{P}(X) \rightarrow L$ を Theorem 6.1 で存在が保証される左 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & L \\ & \searrow y_X \quad \swarrow \hat{f} & \\ & \mathcal{P}(X) & \end{array} \quad \begin{array}{c} \wedge \\ | \end{array}$$

と定める.

1. $\hat{f}$ は任意の $\sup$ を保存する^{*14}ことを示せ.

^{*14} $\sup$ を保つとは, 任意の部分集合について $\sup$ の行き先が像の $\sup$ と一致することをいう.

2. 対応 $f \mapsto \hat{f}$ は (順序保存) 写像 $X \rightarrow L$ と $\sup$ を保つ順序保存写像 $\mathcal{P}(X) \rightarrow L$ の間の一対一対応を与えることを示せ. したがって**幂集合は集合の普遍的な完備化**^{*15}である.
3. 順序保存写像 $\check{f}: L \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を $\check{f}(l) := \{x \in X \mid f(x) \leq l\}$ で定める. 任意の $S \in \mathcal{P}(X), l \in L$ について

$$S \subset \check{f}(l) \iff \hat{f}(S) \leq l$$

となることを示せ^{*16}.

4. この演習における自明な順序による順序集合 X を一般の順序集合 P に一般化し, $\mathcal{D}(P)$ は P の**普遍的な完備化**であることを結論づけよ.

対応する圏論の定理は, Kan 拡張に関するもっとも興味深い定理の一つである Nerve and realization^{*17} (nLab の <https://ncatlab.org/nlab/show/nerve+and+realization> や [1] の Remark 6.5.9. など) である.

Exercise 7.7 (稠密性). 順序保存写像 $f: Q \rightarrow R$ が稠密であるとは, id_R が f の f に沿った**各点左 Kan 拡張**になることをいう.

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow f & \nearrow \text{id}_R \\ & R & \end{array} \quad \wedge \mid$$

口語的に言い換えれば, R の元が Q の元との関係性のみによって (計算公式で) 復元できることをいう.

1. 順序保存写像 $f: Q \rightarrow R$ について, 順序保存写像 $\check{f}: R \rightarrow \mathcal{D}(Q)$ を $\check{f}(r) := \{q \in Q \mid f(q) \leq r\}$ で定める^{*18}. このとき, f が稠密であることは $\check{f}$ が埋め込みであることと同値なことを示せ. (R の元は Q の部分集合として記述できる)
2. 任意の順序集合 P について, $y_P: P \rightarrow \mathcal{D}(P)$ は稠密なことを示せ.

対応する圏論の定理は [1] の Theorem 6.5.8. や [2] の X 章 6 節である.

各点性がないときについては, 8 章をみるといい. 最後の稠密性の演習は, 各点性が稠密の定義に出てきただけで, 演習を解いただけではモチベーションを共有できなかったかもしれない. そこで, 稠密性に関して親しみ深い例を挙げておく.

Example 7.8 (実数における稠密性). $\mathbb{R}$ の部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ の埋め込み $\iota: S \rightarrow \mathbb{R}$ が稠密であることは, S が $\mathbb{R}$ の部分集合として (位相空間的に) 稠密であること, つまり任意の相異なる実数の組 $r < r'$ についてある $s \in S$ が存在して $r < s < r'$ となること, と同値である. 特に $\iota: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ は稠密である. Exercise 7.7 の 1 により, $\check{\iota}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{Q})$ は埋め込みになり, 実数は下に閉じた $\mathbb{Q}$ の部分集合として記述できる. これはいわゆる**デデキント切断**である

^{*15} 圏論的な文脈で言えば, 実は余完備化というべきである.

^{*16} これを順序集合論ではガロア接続, 圏論では随伴という

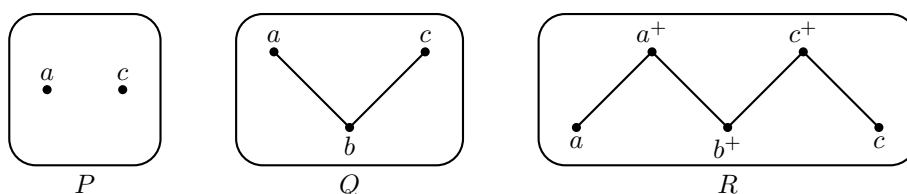
^{*17} 他にも Kan の随伴や普遍随伴などと呼ばれることもあるらしい.

^{*18} これは Exercise 7.6 のものと等しい. 圏論的には restricted Yoneda embedding というものになっている.

8 予想外のおもちゃ

この章では少し変わった Kan 拡張の例を 4 つ挙げる．最初の二つは各点でない Kan 拡張であり，7 章で各点性を仮定した 2 つの演習の各点性を外した場合の反例になっている．残りの 2 つはカントールの悪魔の階段の Kan 拡張としての記述とケイリー・ハミルトンの定理の Kan 拡張を用いた証明である．

Example 8.1 (各点でない Kan 拡張 1). 次の 3 つの順序集合を考える． $P = \{a, c\}$ には自明な順序を入れる． $Q = \{a, b, c\}$ には $a \geq b \leq c$ なる順序を入れる． $R = \{a, a^+, b^+, c^+, c\}$ には $a \leq a^+ \geq b^+ \leq c^+ \geq c$ なる順序を入れる．



順序保存写像 $f : P \rightarrow R$ と $g : P \rightarrow Q$ を a は a に， c は c に移すことで定める．順序保存写像 $(-)^+ : Q \rightarrow R$ を a は a^+ に， b は b^+ に， c は c^+ に移すことで定める．

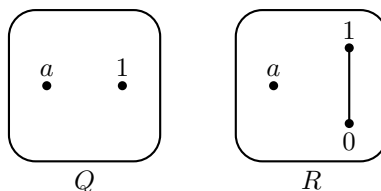
このとき， $f \leq (-)^+ \circ g$ となる．

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g \quad \swarrow (-)^+ & \\ & Q & \end{array} \quad \wedge \quad$$

さらに， $f \leq h \circ g$ なる順序保存写像 $h : Q \rightarrow R$ は $(-)^+$ しか存在しない．したがって $(-)^+$ は f の g に沿った左 Kan 拡張である．しかし，この左 Kan 拡張は各点 Kan 拡張ではない．さらに， g は埋め込みであるにもかかわらず $(-)^+$ は f の真の拡張になっていない．したがって Exercise 7.2 における各点性の仮定は必要である．

次の例は@LiEat_D に教えてもらったものである．私書き直しているもので，間違いがあれば私に責任がある．

Example 8.2 (各点でない Kan 拡張 2). 次の 2 つの順序集合を考える． $Q = \{a, 1\}$ には自明な順序を入れる． $R = \{a, 0, 1\}$ には $0 \leq 1$ なる順序を入れる．



順序保存写像 $f : Q \rightarrow R$ を a は a に， 1 は 1 に移すことで定める．このとき， id_R は f の f に沿った左

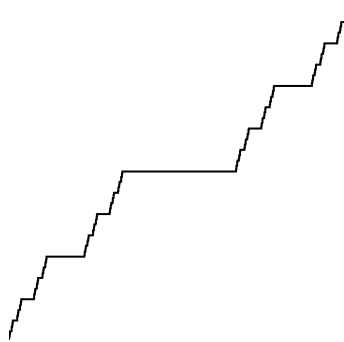
Kan 拡張になる.

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow f \quad \wedge \mid \quad \nearrow \text{id}_R & \\ & R & \end{array}$$

しかし, $0 \in R$ の行き先を考えればこの左 Kan 拡張は各点 Kan 拡張ではないことがわかる. したがって Exercise 7.7 における 稠密性の定義で各点性を外すと別の概念になってしまうし, 当然 Exercise 7.7 の小問 1 は成立しなくなる.

Example 8.3 (カントールの悪魔の階段). カントールの悪魔の階段は, 3 進数評価に沿った 2 進数評価の右 Kan 拡張であることを説明する.

図 1 カントールの悪魔の階段



二つの記号 $+, -$ の無限文字列全体と $+\geq -$ による辞書式順序順序集合^{*19} $\text{Sq} := \{+, -\}^{\{1,2,3,\dots\}}$ を考える. 正整数 $m \geq 1$ について, m 進数評価という順序保存写像 $\text{ev}_m : \text{Sq} \rightarrow [0, 1]$ を次のように定める. $-$ を 0 へ, $+$ を $m-1$ へ置き換えて m 進数少数展開だと思ったときの値, つまり

$$\text{ev}_m((a_n)_{n=1}^\infty) := \sum_{n \geq 1, a_n = +} \frac{m-1}{m^n}$$

と定める. 例えば

$$\begin{aligned} \text{ev}_{10}(+++++\dots) &= 0.999999\dots = 1 \\ \text{ev}_3(+ - + - + - \dots) &= (0.202020\dots)_3 = 0.75 \end{aligned}$$

である. カントールの悪魔の階段 $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ は ev_3 に沿った ev_2 の右 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sq} & \xrightarrow{\text{ev}_2} & [0, 1] \\ & \searrow \text{ev}_3 \quad \vee \mid \quad \nearrow c & \\ & [0, 1] & \end{array}$$

Example 8.4 (ケイリー・ハミルトンの定理). $\mathbb{C}$ 上^{*20}有限次元線型空間 V と自己線型写像 $f : V \rightarrow V$ の組 (V, f) を有限次元線形離散力学系 (以下, FLDD) と呼ぶことにする. 線形代数における正方行列の理論は FLDD の理論とも捉えられる.

^{*19} つまり, $(a_n)_{n=1}^\infty \leq (b_n)_{n=1}^\infty$ となるのは二つの無限文字列が等しいとき $(a_n)_{n=1}^\infty = (b_n)_{n=1}^\infty$ か, 異なる最初の記号 $a_{n_0} \neq b_{n_0}$ について $a_{n_0} = -$ かつ $b_{n_0} = +$ なることとする.

^{*20} 好きな体に変えてもいい

FLDD (V, f) の最小多項式 $\varphi_{(V, f)}$ とは, $\varphi(f) = 0$ なる $\mathbb{C}$ 上モノック多項式^{*21} $\varphi(X) \in \mathbb{C}[X]$ のうち最小次数のものであった. 最小多項式の定義は「条件を満たす最小のもの」の形であり普遍性の一種である. この普遍性を $\sup$ の形で書き, (各点) 左 Kan 拡張であることを観察しよう.

線型写像 $\varphi(f)$ が 0 であることの定義は任意の元を 0 に送るということだった. したがって, 各元 $v \in V$ について $\varphi(f)(v) = 0$ となるモノック多項式 $\varphi(X)$ のうち最小次数のもの $\varphi_v(X)$ を用いれば, 最小多項式 $\varphi(X)$ は $\{\varphi_v \mid v \in V\}$ の最小公倍多項式と書ける. 最小公倍多項式は $\mathbb{C}[X]$ のモノック多項式と剰余関係のなす順序集合^{*22} $\text{MPoly}_{\mathbb{C}}$ の $\sup$ なので,

$$\varphi(X) = \sup_{v \in V} \varphi_v(X)$$

とも書ける.

これが各点左 Kan 拡張の形になっていることを観察しよう. 順序集合 LDyn を, FLDD の同型類^{*23} を元にもち, 自己線型写像と可換な単射線形写像 $(W, g) \rightarrow (V, f)$ が存在するとき $(W, g) \leq (V, f)$ とする順序集合として定める. そして, 順序集合 LDyn^{cyc} を一元生成^{*24}な FLDD からなる LDyn の部分順序集合とする. 部分 FLDD の最小多項式は全体の最小多項式を割り切るので最小多項式を取る順序保存写像 $\varphi_- : \text{LDyn} \rightarrow \text{MPoly}_{\mathbb{C}}$ が伸びる. その LDyn^{cyc} への制限にも $\varphi_- : \text{LDyn}^{\text{cyc}} \rightarrow \text{MPoly}_{\mathbb{C}}$ という表記を用いる. 元を見る代わりに一元生成な部分線形離散力学系を考えれば, ここまでの考察より

$$\begin{array}{ccc} \text{LDyn}^{\text{cyc}} & \xrightarrow{\varphi_-} & \text{MPoly}_{\mathbb{C}} \\ & \searrow \iota \quad \wedge \quad \nearrow \varphi_- & \\ & \text{LDyn} & \end{array}$$

は各点左 Kan 拡張であることがわかる. このように, (V, f) の最小多項式は, V の元を零化する多項式たちの V 全体への自然な拡張である.

最小多項式が Kan 拡張であることは, 実はケイリー・ハミルトンの定理を含意している. 一元生成な有限次元線形離散力学系については, 最小多項式と固有多項式は一致している^{*25}から, 固有多項式をとる順序保存写像^{*26} $\Phi_- : \text{LDyn} \rightarrow \text{MPoly}_{\mathbb{C}}$ に関して $\varphi_- = \Phi_- \circ \iota : \text{LDyn}^{\text{cyc}} \rightarrow \text{MPoly}_{\mathbb{C}}$ なる等式がある.

$$\begin{array}{ccc} \text{LDyn}^{\text{cyc}} & \xrightarrow{\varphi_- = \Phi_-} & \text{MPoly}_{\mathbb{C}} \\ & \searrow \iota \quad \parallel \quad \nearrow \Phi_- & \\ & \text{LDyn} & \end{array}$$

^{*21} 最高次の係数が 1 の多項式のこと

^{*22} 環論を知っている人は, 代わりに $\mathbb{C}[X]$ のイデアルと包含関係のなす順序集合 (の反変順序集合) を考えることを勧める. $\mathbb{C}[X]$ が PID であることを用いれば (0 をモノックに含むかの流儀に依存するが) 反変順序同型が得られる. イデアルとみて議論すれば (モノックだとか言わずに済む分) 議論が単純になり, 多方向への一般化に耐え, 部分代数の順序集合に関する一般論 (例えば完備束になること) が直ちに使えるなどのメリットがある.

^{*23} 自己射と可換な線形同型の存在で定義している

^{*24} (V, f) が一元生成とはある元 $v \in V$ が存在し $\{f^n(v) \mid n \in \mathbb{N}\}$ が V を線型空間として生成することをいう. ある元 $v \in V$ が存在し v を含む最小の部分線形力学系が V 全体であることといってもよい.

^{*25} 生成元 v について基底 $\{f^n(v) \mid 0 \leq n < \dim_V\}$ での行列表示を見よ.

^{*26} 順序保存写像であることは簡単に確認できる. 部分 FLDD W に関して, W の基底を拡張した基底について行列表示を見るといい.

左 Kan 拡張の定義 (普遍性) より

$$\begin{array}{ccc}
 \text{LDyn}^{\text{cyc}} & \xrightarrow{\varphi_- = \Phi_-} & \text{MPoly}_{\mathbb{C}} \\
 \searrow \iota & \wedge \downarrow & \nearrow \Phi_- \\
 & \text{LDyn} &
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 \text{LDyn}^{\text{cyc}} & \xrightarrow{\varphi_- = \Phi_-} & \text{MPoly}_{\mathbb{C}} \\
 \searrow \iota & \wedge \downarrow & \nearrow \Phi_- \\
 & \text{LDyn} &
 \end{array}$$

$\varphi_- \leq \Phi_- : \text{LDyn} \rightarrow \text{MPoly}_{\mathbb{C}}$ となる。つまり、任意の FLDD について**最小多項式は固有多項式を割り切る**。これはケーリー・ハミルトンの定理である。

この証明は順序集合論より広い圏論の枠組みで記述した方が多少スッキリする。[7] におけるケイリー・ハミルトンの定理の証明は、実質的にこの証明を書き下したものになっている。

半分冗談半分本気で次の演習を出しておく。

Exercise 8.5. あなたが最近勉強した数学の中から順序集合の Kan 拡張を探し、面白いものを見つけ次第私 (twitter: @hora_algebra) に教えてください。

9 圏論の紹介：Kan 拡張はもっとすごい！

ここまで、順序集合の範囲で Kan 拡張の概念を説明してきた。普通、Kan 拡張は圏論の文脈で記述されるものである。圏論における Kan 拡張に興味がある人は [1] や [2] を読むとよい。

順序集合は元の間に大小関係を考えるものだったが、圏は元 (普通、対象と呼ぶ) の間により豊かな関係性 (普通、射と呼ぶ) を考えられるような順序集合の一般化概念である。圏論が強力な一つの理由は、数学的对象とその間の関係を一つの圏とみなせることである。そして、この文章における順序保存写像に対応する概念 (関手) は、数学的对象の構成とみることができる。この視点により、この文章では順序保存写像の拡張理論であった Kan 拡張は**圏の言葉では数学的構成の拡張理論になる**。ここに、Kan 拡張の重要性の本質 (の一つ) がある。

また、基礎的な圏論の中には他にも米田の補題や米田埋め込みや随伴や極限やモナドなどの理論があるが、Kan 拡張はこれらに直感的で統一的な視点を与える。例えば、「関手から対象を得る 2 つの自然な方法が極限と余極限である」などである^{*27}。このように、Kan 拡張の理論は**基本的な圏論概念の統一理論である**という見方もできるのである。この視点における有名な言葉が「全ての概念は Kan 拡張である」である。[2] から引用すれば

The notion of Kan extensions subsumes all the other fundamental concepts of category theory.

である。

圏論を学ぶメリットを大量に列挙する代わりに、ここまでの文章で感じ取れるかもしれない圏論の一つの役割を強調してこの文章を終える。それは、**凡人のための道標としての圏論**である。圏論は数学に対する自然で直感的な視点を提供しようとする。あなたが、よい道筋を自力で思い付けような天才でなくても、過去の天才が整理した圏論を用いることで“正しい”方向性を知ることができるかもしれない。測度を可能な限り大きな範囲に拡張したいときに、「任意の零集合の部分集合が...」と考えられなくても、順序集合の Kan 拡張を

^{*27} 順序集合での対応物は Exercise 4.9 である。

知っているあなたは可能な限り大きな範囲に拡張したいとそのまま Kan 拡張の理論に訴えればよい. 圏論の Kan 拡張を学べば, 順序集合の枠組みから飛び出して, 部分群の表現を全体に拡張したいときも, quasi-iso の逆射を追加した圏に関手を拡張したいときも, 自然数に対する標準単体を simplicial set の位相空間的な実現に拡張したいときも, 開集合を bundle とみなす方法を前層を bundle とみなす方法に拡張したいときも, Kan 拡張は “正しい” 方向性を教えてくれる.

参考文献

- [1] Riehl, Emily. Category theory in context. Courier Dover Publications, 2017.
- [2] Mac Lane, Saunders. Categories for the working mathematician. Vol. 5. Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] MacLane, Saunders, and Ieke Moerdijk. Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Awodey, Steve. Category theory. Oxford university press, 2010.
- [5] Kelly, G. M.. BASIC CONCEPTS OF ENRICHED CATEGORY THEORY. 2005.
- [6] hora-algebra, 圏論の Toy Example としての集合演算. <https://hora-algebra.github.io/ToyExample1.pdf>
- [7] 斎藤毅. 線形代数の世界 : 抽象数学の入り口. 東京大学出版会, 2007.