

順序集合で遊ぶ Kan 拡張

洞龍弥

東京大学数理科学研究科修士 1 年

2022 年 6 月 4 日
数理空間トポス

目次

- ① Kan 拡張のスローガン
- ② 有理数の指数関数から実数の指数関数への拡張
- ③ 順序集合論速修
- ④ Kan 拡張の定義と例
- ⑤ Kan 拡張はもっとすごい!

目次

- 1 Kan 拡張のスローガン
- 2 有理数の指数関数から実数の指数関数への拡張
- 3 順序集合論速修
- 4 Kan 拡張の定義と例
- 5 Kan 拡張はもっとすごい!

Kan 拡張のスローガン

全ての概念は Kan 拡張である

Kan 拡張のスローガン

圏論は、数学に統一的な視点をもたらす。Kan 拡張はさらに圏論を統一する。

Kan 拡張のスローガン

今回のミニレクチャーの目的は、初等的な数学の範囲でこのフレーズ「全ての概念は Kan 拡張である」の魅力の一端を伝えること

目次

1 Kan 拡張のスローガン

2 有理数の指数関数から実数の指数関数への拡張

3 順序集合論速修

4 Kan 拡張の定義と例

5 Kan 拡張はもっとすごい!

指数関数

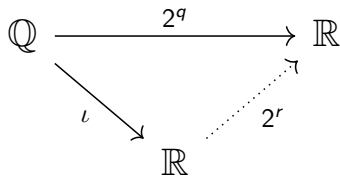
高校数学で、指数関数 $2^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はどのように定義されていたでしょうか．自然数 $n \in \mathbb{N}$ については、

$$2^n = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ 回}}$$

と定めて、有理数 $q \in \mathbb{Q}$ については指数法則 $2^q \times 2^{q'} = 2^{q+q'}$ が成り立つ唯一の関数として具体的に定義した．

指数関数

有理数上の関数 $2^q : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ を実数上の関数 $2^r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ へどのように**拡張**したのか思い出す.



指数関数

2^r は r へ収束する有理数列 $q_1, q_2, \dots \rightarrow r$ を一つ取り,
 $2^{q_1}, 2^{q_2}, \dots$ の収束先として定義した.

$r = \pi$ のときの例

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, \dots \rightarrow \pi$$

$\Downarrow$

$$2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, \dots \rightarrow 2^\pi$$

指数関数

拡張する写像だけなら無数に存在しているから、普段の拡張

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{2^q} & \mathbb{R} \\ & \searrow \iota & \nearrow 2^r \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

は本当に**自然な拡張**なのかは問う価値がある.
説明の方法は何通りもある (連続性, 単調性,...) が, 今回は順序構造の視点から説明をする.

目次

1 Kan 拡張のスローガン

2 有理数の指数関数から実数の指数関数への拡張

3 順序集合論速修

4 Kan 拡張の定義と例

5 Kan 拡張はもっとすごい!

順序集合

話を続けるために、順序集合という概念が必要なのでそれを導入する。(集合論的な言葉に慣れていない人は、「実数や有理数みたいに大小関係が考えられる何か」だと思ってください。)

定義: 順序集合

順序集合とは集合 X と二項関係 $\leq$ の組 $(X, \leq)$ で、以下の三つの条件を満たすものをいう。

- ▶ 任意の $x \in X$ について $x \leq x$
- ▶ 任意の $x, y, z \in X$ について $x \leq y$ かつ $y \leq z$ なら $x \leq z$
- ▶ 任意の $x, y \in X$ について $x \leq y$ かつ $y \leq x$ なら $x = y$

順序集合の例

例: 数の大小

整数の集合 $\mathbb{Z}$, 有理数の集合 $\mathbb{Q}$, 実数の集合 $\mathbb{R}$ は普通の大小関係 $\leq$ で順序集合になる.

例: 集合の大小

集合 A について, A の冪集合 (部分集合全体の集合) $\mathcal{P}(A)$ は包含関係 $\subset$ で順序集合.

例: つまらない順序

どんな集合 X についても, 任意の $x, y \in X$ について $x \leq y \iff x = y$ とすることで順序集合になる. これを自明な順序という.

順序集合の例

Exercise: 剰余関係

非負整数の集合 $\mathbb{N}$ は剰余関係 $|$ で順序集合になることを確認せよ。

Exercise?: 人間関係

人間の集合を P としたとき、二項関係 $p \leq q$ を以下のように定めると $(P, \leq)$ は順序集合になるだろうか。

1. p は q の祖先である
2. p は q の子孫である
3. p は q を好意的に思っている
4. p と q はお互いのことを知っている
5. p から知り合いを有限回辿ると q へ行きつける

順序保存写像

順序集合の間の写像のうち、順序の構造を保つものに注目する.

定義: 順序保存写像

順序集合 P, Q について, P から Q への写像 $f : P \rightarrow Q$ が順序保存写像であるとは, 任意の $x, y \in P$ について

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

なることをいう.

順序保存写像

例: 実数での例

写像 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が順序保存写像であることと広義単調増加関数であることは同値である. $f(x) = x$ や $f(x) = 0$ や $f(x) = 2^x$ は順序保存写像だが $f(x) = -x$ や $f(x) = \sin(x)$ は順序保存写像ではない.

順序保存写像の大小

順序集合に関する準備として、最後に導入するのは、順序保存写像の間の大小関係である。

定義: 順序保存写像の大小

順序集合 P, Q と P から Q への順序保存写像 $f, g : P \rightarrow Q$ について、 $f \leq g$ を

$$\text{任意の } p \in P \text{ について } f(p) \leq g(p)$$

と定める。

順序保存写像の大小

例: 実数での例

順序保存写像 $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の大小関係の例を与える.
 $f(x) = x + 2, g(x) = x + 3$ なら $f \leq g$ であるが,
 $f(x) = 2^x, g(x) = 3^x$ なら $f \leq g$ でも $g \leq f$ でもない.

Exercise: 順序保存写像の為に順序集合

順序集合 P, Q について, P から Q への順序保存写像全体の集合 Q^P は順序保存写像の大小 $\leq$ で順序集合になることを確かめよ.

目次

- 1 Kan 拡張のスローガン
- 2 有理数の指数関数から実数の指数関数への拡張
- 3 順序集合論速修
- 4 Kan 拡張の定義と例
- 5 Kan 拡張はもっとすごい!

Kan 拡張の定義

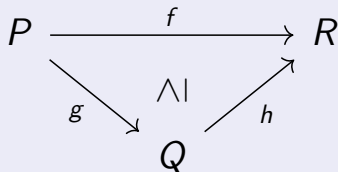
では、ついに Kan 拡張の定義に入る． Kan 拡張には、(順序集合論やそれを拡張した圏論ではいつものことだが) 双対的な二つの概念がある． それぞれ、左 Kan 拡張と右 Kan 拡張と呼ばれている． これらは不等号の向きを逆転させただけの関係になっている．

Kan 拡張の定義

定義: 左 Kan 拡張

順序集合 P, Q, R と順序保存写像

$f : P \rightarrow R, g : P \rightarrow Q$ について, f の g に沿った左 Kan 拡張とは, $f \leq hg$



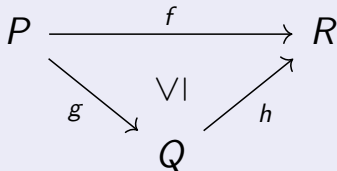
なる順序保存写像 $h : Q \rightarrow R$ のうち最小のものである.

Kan 拡張の定義

定義: 右 Kan 拡張

順序集合 P, Q, R と順序保存写像

$f : P \rightarrow R$, $g : P \rightarrow Q$ について, f の g に沿った右 Kan 拡張とは, $f \geq hg$



なる順序保存写像 $h : Q \rightarrow R$ のうち最大のものである。

Kan 拡張の定義

定義を具体例で解きほぐす前に、いくつか注意をしておく.

- ▶ この定義は、ただの類似ではなく本物の Kan 拡張である.
- ▶ Kan 拡張は、定義域が等しい二つの順序保存写像さえあれば議論できる.
- ▶ (左 or 右)Kan 拡張は存在すればただ一つである. 従って、「 $\sim$ とは $\sim$ の $\sim$ に沿った左 Kan 拡張と定める」のような定義は存在証明さえすれば曖昧さなく使える.

Kan 拡張の例

例: 指数関数

導入に使った指数関数の例は左 (かつ右) Kan 拡張である. $2^q : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\iota : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ (単なる埋め込み) に沿って拡張する. 順序保存写像 $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ であって,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{2^q} & \mathbb{R} \\ & \searrow \iota & \nearrow h \\ & \mathbb{R} & \end{array} \quad \wedge \mid$$

(つまり $\forall q \in \mathbb{Q}, 2^q \leq h(q)$) なるものの中で最小のものが左 Kan 拡張である. これは普段の $2^r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ である.

Kan 拡張の例

左右の Kan 拡張は一致するとは限らない. そのことを示す例を見てみる.

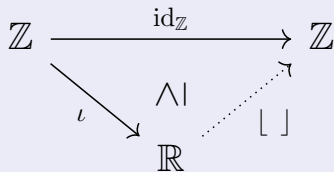
例: 実数の整数近似 (1/2)

今度は, $\text{id}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を埋め込み $\iota : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ に沿って拡張しよう. つまり, 実数から整数を得る自然な方法は何か? を考える. 実数の自然な整数近似は何か? と言ってもよい.

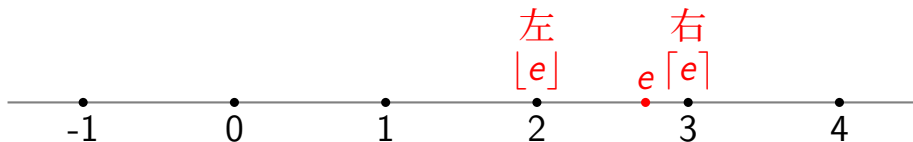
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} \\ & \searrow \iota & \nearrow h \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

Kan 拡張の例

例: 実数の整数近似 (2/2)



ι に沿った $\text{id}_{\mathbb{Z}}$ の左 Kan 拡張は床関数 $\lfloor \cdot \rfloor$ である．双対的に右 Kan 拡張は天井関数 $\lceil \cdot \rceil$ である．



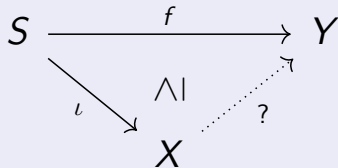
Kan 拡張の例 (非存在)

Kan 拡張は，存在するとは限らない．良く言えば，存在してほしいときにはちゃんと存在しない．

Kan 拡張の例 (非存在)

例: (単なる) 写像の自然な拡張は存在しない

集合 X とその部分集合 S を考える. S から集合 Y への写像 $f: S \rightarrow Y$ を X 上に拡張したい. 集合を自明な順序で順序集合とみなす. 埋め込み $\iota: S \rightarrow X$ に沿った f の左 (or 右) Kan 拡張



は自明な場合 ($S = X$ か Y が一点の場合) を除いて存在しない.

Kan 拡張の例 (非存在)

Exerciese: 実数の自然な有理数近似

自然な整数近似 (床関数と天井関数) を真似て $\text{id}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ の埋め込み $\iota : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ に沿った Kan 拡張を考えてみる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{Q}}} & \mathbb{Q} \\ & \searrow \iota & \nearrow ? \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

実数の自然な有理数近似 (ι に沿った $\text{id}_{\mathbb{Q}}$ の左 Kan 拡張) は存在しないことを示せ.

Kan 拡張の例 (本当の拡張でない)

Kan 拡張の定義においては本当の拡張になること $f = h \circ g$ は要求されていない. 後に見るように, Kan 拡張は一般には本当の拡張にはならない¹. 良く言えば, 本当の拡張が存在しないときでも Kan 拡張は拡張の最適近似を探してくれる.

¹本当の拡張になるための便利な十分条件が知られている.

Kan 拡張の例 (本当の拡張でない)

例: $\forall, \exists$ は Kan 拡張 (1/3)

順序集合 Ω を $\Omega = \{\text{真}, \text{偽}\}$ なる集合の上で $\text{偽} \leq \text{真}$ という不等号で定義する.

集合 X に自明な順序を入れ, (順序保存) 写像 $X \rightarrow \Omega$ のことを X 上の命題と呼ぶことにする.

Kan 拡張の例 (本当の拡張でない)

例: $\forall, \exists$ は Kan 拡張 (2/3)

では, 命題の変数の個数を減らす自然な方法は存在するだろうか. つまり $X \times Y$ 上の命題 $\phi : X \times Y \rightarrow \Omega$ が与えられたとき, 第一成分射影 $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ に沿った Kan 拡張は存在するだろうか.

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\phi} & \Omega \\ & \searrow \pi_1 & \nearrow ? \\ & X & \end{array} \quad \wedge \mid$$

Kan 拡張の例 (本当の拡張でない)

例: $\forall, \exists$ は Kan 拡張 (3/3)

実は, $\exists y \in Y, \phi(-, y)$ が左 Kan 拡張を与える.

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\phi} & \Omega \\ & \searrow \pi_1 & \nearrow \exists y \in Y, \phi(-, y) \\ & X & \end{array} \quad \wedge \mid$$

双対的に, $\forall y \in Y, \phi(-, y)$ が右 Kan 拡張を与える.
命題の変数を減らす 2 つの自然な方法は $\exists$ と $\forall$ である.

目次

- 1 Kan 拡張のスローガン
- 2 有理数の指数関数から実数の指数関数への拡張
- 3 順序集合論速修
- 4 Kan 拡張の定義と例
- 5 Kan 拡張はもっとすごい!

Kan 拡張の魅力

ここまで、Kan 拡張の定義と簡単な例を見てきた。
Kan 拡張の詳細はここまでにして、最後に Kan 拡張がいかに魅力的な概念であるかを伝えようと試みる。
Kan 拡張の魅力 (の一側面) は次の一見相反する 3 つの利点を持つことである。

1. 一般的である
2. 直感的である
3. 計算できる

Kan 拡張の威力 1: 一般的である

「全ての概念は Kan 拡張である」のフレーズからもわかるように，Kan 拡張は異様とも言える一般性を持つ．代数学にも幾何学にも解析学にも数学基礎論にも，基礎的な内容にも高度な内容にも，Kan 拡張は現れている．

Kan 拡張の威力 2: 直感的である

これは、圏論一般で言えることだが、抽象的な一般論は莫大な具体例を持つ。従って、それまで学んだ数学を Kan 拡張 (を含む² 圏論) を通して有機的に結合し、直感を交流させることができる。

また、Kan 拡張はその簡潔さ故に自然言語的な直感を数学的にそのまま定式化することを助けてくれることもある³。

²過激派は、「に含まれる」というかもしれないが

³「多様体論は微積分学の自然な拡張だから…」などは Lawvere の見つけた驚異的な例である。

Kan 拡張の威力 3: 計算できる

そして、最後に強調したい点は、Kan 拡張には計算公式があるということである⁴。

Kan 拡張を計算できるというのは驚異的なことで、全ての概念が Kan 拡張であるのなら全ての概念を計算してしまう!! それは言い過ぎとしても、私の知る限り最も万能性の高い公式であり、この公式なしで数学をすることは今の私には考えられない。

⁴この計算公式のアイデアも面白いのでぜひ紹介したかったのだが、時間の都合で省略することにした。

Kan 拡張の威力

Kan 拡張は道標

教科書案内

圏論の基礎, S. マックレーン

基礎が網羅された, 数学玄人向けの代表的教科書.

Category Theory, Steve Awodey

計算機科学や論理学を意識した, 親切な入門書.

ベーシック圏論, T. レンスター.

最低限の基礎を丁寧に解説する, 新たな定番.

Category Theory in Context, Emily Riehl.

とにかく具体例が多い, 超(超!) オススメの教科書

演習問題

演習 1: 上限下限

元をちょうど1つ持つ順序集合を **1** と書く. 順序集合 R と $S \subset R$ について, (一意的な) 写像 $! : S \rightarrow \mathbf{1}$ に沿った埋め込み $\iota : S \rightarrow R$ の左 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\iota} & R \\ & \searrow ! & \nearrow [r] \\ & \mathbf{1} & \end{array} \quad \wedge \mid$$

は S の上限であることを示せ. 双対的に下限は右 Kan 拡張として定義できる. したがって, 部分集合から元を得る2つの自然な方法は上限と下限である.

演習問題

演習 2: 順像の逆

写像 $f : X \rightarrow Y$ について, 順像をとる順序保存写像 $f(-) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ を考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{P}(X)}} & \mathcal{P}(X) \\ & \searrow f(-) \quad \wedge \mid \quad \nearrow ? & \\ & \mathcal{P}(Y) & \end{array}$$

$\text{id}_{\mathcal{P}(X)}$ の $f(-)$ に沿った左 Kan 拡張を求めよ.

演習問題

演習 3: 埋め込みに沿った Kan 拡張 (やや難)

f の g に沿った左 Kan 拡張 h が存在して

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & R \\ & \searrow g \quad \wedge \mid \quad \nearrow h & \\ & Q & \end{array}$$

さらに g が $p_1 \leq p_2 \iff g(p_1) \leq g(p_2)$ を満たすが,
 $f \neq hg$ となる例を見つけよ.

演習問題

演習 4: あなたにとって面白い Kan 拡張

あなたが最近勉強した数学の中から順序集合の Kan 拡張を探し、面白いものを見つけ次第私に教えてください。