

母関数の種

洞龍弥

東京大学数理科学研究科修士 2 年

2023 年 7 月 15 日
数理空間トポス

目的

目的1 母関数という手法を伝える

目的2 母関数を体系的に取り扱う Joyal's
Species の理論を伝える

目的

目的1 母関数という手法を伝える

目的2 母関数を体系的に取り扱う Joyal's
Species の理論を伝える

目的3 圏論的組合せ論に誰かを引きずりこむ

目次

- 1 導入: 組合せ論の世界と数の世界の不思議な対応
- 2 Species の定義
- 3 Species の操作
- 4 フラグ回収
- 5 メッセージ

Table of Contents

- 1 導入: 組合せ論の世界と数の世界の不思議な対応
- 2 Species の定義
- 3 Species の操作
- 4 フラグ回収
- 5 メッセージ

組合せ論側 準備運動

問題

n 種のお菓子を順に食べる方法は何通りあるか？

組合せ論側 準備運動

問題

n 種のお菓子を順に食べる方法は何通りあるか？

解答

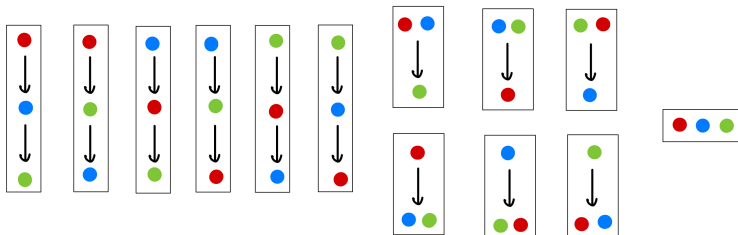
$n!$ 通り

組合せ論側: 本題

問題

n 種のお菓子を順に食べる方法は何通りあるか？
ただし、同時に複数個食べてもよい。

例えば $n = 3$ なら 13 通り。



組合せ論側: 本題

問題

n 種のお菓子を順に食べる方法は何通りあるか？
ただし、同時に複数個食べてもよい。

答えを A_n とおくと、

- ▶ $A_0 = 1$
- ▶ $A_1 = 1$
- ▶ $A_2 = 3$
- ▶ $A_3 = 13$
- ▶ $A_4 = 75$

組合せ論側: 本題

問題

n 種のお菓子を順に食べる方法は何通りあるか？
ただし、同時に複数個食べてもよい。

答えを A_n とおくと、

▶ $A_0 = 1$

▶ $A_1 = 1$

▶ $A_2 = 3$

▶ $A_3 = 13$

▶ $A_4 = 75$

これはよくわからん。

数側: 準備運動

問題

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = ?$$

数側: 準備運動

問題

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = ?$$

解答

1

数側: 準備運動?

問題

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \dots = ?$$

数側: 準備運動?

問題

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \dots = ?$$

解答

1

数側: 準備運動?

問題

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{8} + \frac{9}{16} + \dots = ?$$

数側: 準備運動?

問題

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^{k+1}} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{4}{8} + \frac{9}{16} + \dots = ?$$

解答

3

数側: 準備運動?

問題

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{2^{k+1}} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{8}{8} + \frac{27}{16} + \dots = ?$$

数側: 準備運動?

問題

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{2^{k+1}} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{8}{8} + \frac{27}{16} + \dots = ?$$

解答

13

数側

問題

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}} = \frac{0^n}{2} + \frac{1^n}{4} + \frac{2^n}{8} + \frac{3^n}{16} + \dots = ?$$

答えを B_n とおくと,

- ▶ $B_0 = 1$
- ▶ $B_1 = 1$
- ▶ $B_2 = 3$
- ▶ $B_3 = 13$
- ▶ $B_4 = 75$

数側

問題

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}} = \frac{0^n}{2} + \frac{1^n}{4} + \frac{2^n}{8} + \frac{3^n}{16} + \dots = ?$$

答えを B_n とおくと,

- ▶ $B_0 = 1$
- ▶ $B_1 = 1$
- ▶ $B_2 = 3$
- ▶ $B_3 = 13$
- ▶ $B_4 = 75$

これもよくわからんが, $A_n = B_n$ っぽい

不思議な対応

事実

全ての自然数 $n \in \mathbb{N}$ について $A_n = B_n$.

3 個のお菓子を 13 通りで食べている横で、無限級数が 13 に収束している！なぜ？

全体像

組合せ論	順序 of 非空(subsets) = 食べる
Species	Arr ◦ IsNonEmpty = TotalPreorder
母関数	合成を保つ!
関数	$\frac{1}{1-x} \circ (e^x - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$ 非自明!! $\frac{1}{2 - e^x}$ テイラー展開 $= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}}_{B_n} \right) \frac{x^n}{n!}$

Table of Contents

- 1 導入: 組合せ論の世界と数の世界の不思議な対応
- 2 Species の定義
- 3 Species の操作
- 4 フラグ回収
- 5 メッセージ

Species の定義 (曖昧)

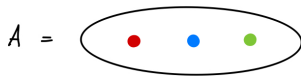
Species(曖昧)

Species とは, 有限集合 A に対して A を台集合にもつ特定の種類の組合せ論的対象の集合を返す対応のことをいう

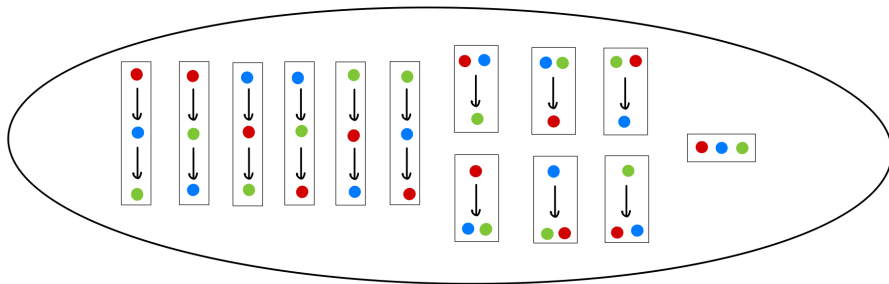
Species(厳密だが今日はいらない)

Species とは, 有限集合と全単射の為す圏 $\mathbb{B}$ 上の自己関手のことである.

Species の例: 食べ方の species (本題)



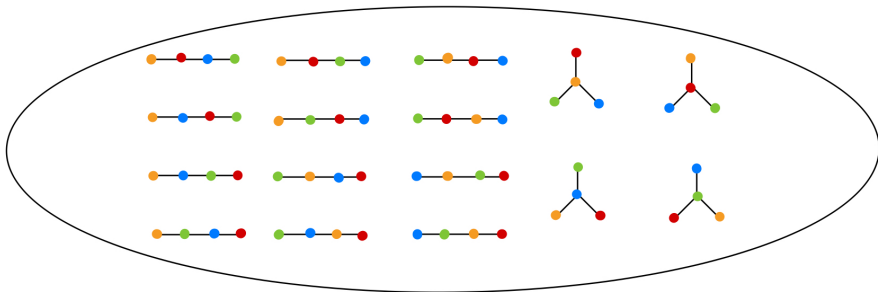
Species of 食べ方 (Total Preorder)



Species の例: 木の species

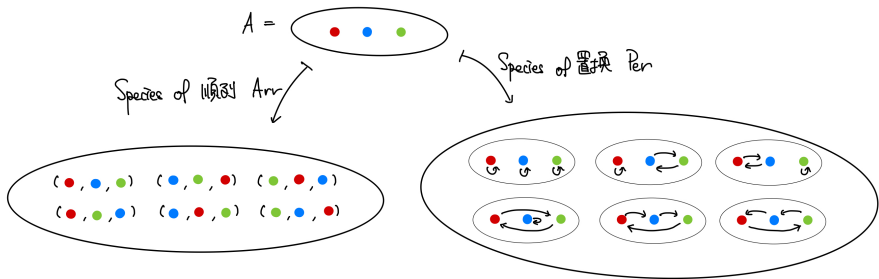


↓ species of tree



Species の例: 順列の species と置換の species

Arr と Per



Species の例: その他

- ▶ 巡回置換 Cycles
- ▶ 元 Element
- ▶ 根つき木 Rooted Trees
- ▶ 自己写像 Endofunctions
- ▶ 自明構造 Triv (集合ありのまま)
- ▶ 「命題」たち
IsOdd, IsEven, IsEmpty, IsNonEmpty, IsSingleton
- ▶ 部分集合, n -彩色 subset, n -coloring
- ▶ 置換群 Permutation groups

Species の母関数

Species の母関数

Species M の母関数 $f_M(x)$ とは, n 元集合上の M 構造の個数を a_n として

$$F_M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2} + a_3 \frac{x^3}{6} + \dots$$

のこと

Species の母関数

Species の母関数

Species M の母関数 $f_M(x)$ とは, n 元集合上の M 構造の個数を a_n として

$$F_M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2} + a_3 \frac{x^3}{6} + \dots$$

のこと

$$F_{\text{Arr}}(x) = F_{\text{Per}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

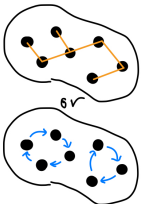
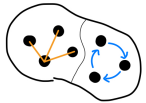
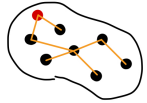
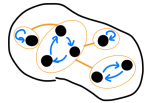
Species の母関数 (簡単な部分)

- ▶ $F_{\text{Triv}}(x) = e^x$
- ▶ $F_{\text{IsOdd}}(x) = \sinh x$
- ▶ $F_{\text{IsEven}}(x) = \cosh x$
- ▶ $F_{\text{IsEmpty}}(x) = 1$
- ▶ $F_{\text{IsNonEmpty}}(x) = e^x - 1$
- ▶ $F_{\text{元}}(x) = xe^x$
- ▶ $F_{\text{部分集合}}(x) = e^{2x}$
- ▶ $F_{n\text{-彩色}}(x) = e^{nx}$

Table of Contents

- 1 導入: 組合せ論の世界と数の世界の不思議な対応
- 2 Species の定義
- 3 Species の操作
- 4 フラグ回収
- 5 メッセージ

四つの操作

関数	和 +	積 ×	微分 ∂	合成 ○
組合せ論 (Species)				

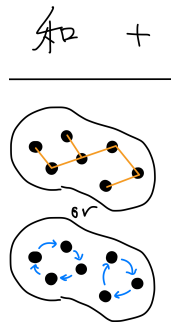
演算 (1/4) 和

Species の和

Species M, N について, $M + N$ 構造とは, M 構造か N 構造のことをいう.

つまり, $M + N$ は n 元集合を n 元 M 構造の集合と n 元 N 構造の集合の (非交) 和集合へ送る species である.

例: $\text{Triv} = \text{IsEven} + \text{IsOdd}$



演算 (1/4) 和

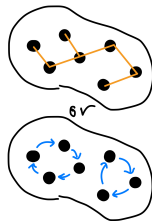
命題: 和の母関数は母関数の和

$$F_{M+N} = F_M + F_N$$

例: $\text{Triv} = \text{IsEmpty} + \text{IsNonEmpty}$
 $\rightsquigarrow e^x = 1 + (e^x - 1)$

例: $\text{Triv} = \text{IsEven} + \text{IsOdd}$
 $\rightsquigarrow e^x = \cosh x + \sinh x$

和 +



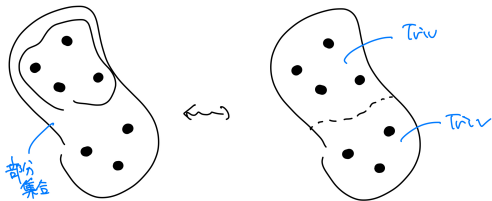
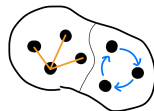
演算 (2/4) 積

Species の積

Species M, N について, 有限集合 A 上の $M \times N$ 構造とは, A の直和分割 $A = S \coprod T$ と S 上の M 構造と T 上の N 構造の三つ組のことをいう.

例: 部分集合 = $\text{Triv} \times \text{Triv}$

積 $\times$



演算 (2/4) 積

命題: 積の母関数は母関数の積

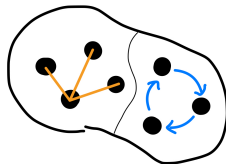
$$F_{M \times N} = F_M \times F_N$$

例: 部分集合 = Triv $\times$ Triv
 $\rightsquigarrow e^{2x} = e^x \times e^x$

例: 元 = IsSingleton $\times$ Triv
 $\rightsquigarrow xe^x = x \times e^x$

例: IsEmpty $\rightsquigarrow 1$ は積の単位元

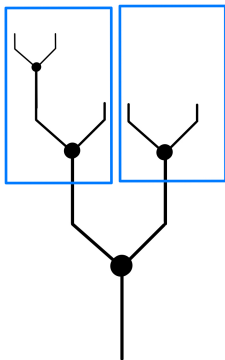
積 $\times$



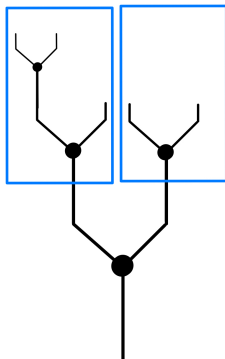
演算 (2/4) 積: カタラン数の導出

BiTree を (ラベルつき根つき) 二分木の species とすると

$$\text{BiTree} = \text{IsSingleton} \times \text{BiTree}^2 + \text{IsEmpty}$$



演算 (2/4) 積: カタラン数の導出



BiTree を (ラベルつき根つき) 二分木の species とすると

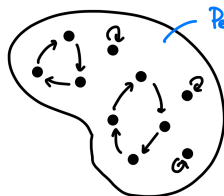
$$\text{BiTree} = \text{IsSingleton} \times \text{BiTree}^2 + \text{IsEmpty}$$

BiTree の母関数を $F(x)$ と略記すると
 $F(x) = xF(x)^2 + 1$ となり

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$$

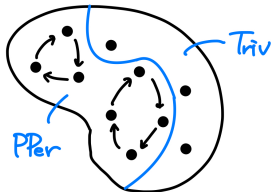
を得る. (カタラン数!)

演算 (2/4) 積: モンモール数の導出

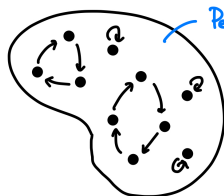


Per を置換の species, PPer を不動点を持たない置換の species とする.

$$\text{Per} = \text{Triv} \times \text{PPer}$$



演算 (2/4) 積: モンモール数の導出

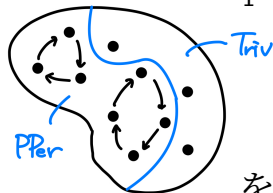


Per を置換の species, PPer を不動点を持たない置換の species とする.

$$\text{Per} = \text{Triv} \times \text{PPer}$$



PPer の母関数を $F(x)$ と略記すると
 $\frac{1}{1-x} = e^x F(x)$ となり



$$F(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

を得る. (展開するとモンモール数!)

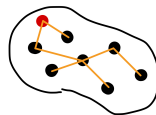
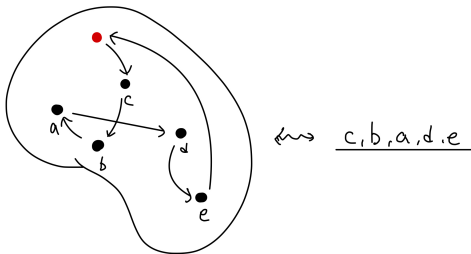
演算 (3/4) 微分

Species の微分

Species M について, n 元集合上の ∂M -構造構造とは, $n+1$ 元上の M 構造のことをいう.

微分 ∂

例: $\partial \text{Cycle} = \text{Arr}$



演算 (3/4) 微分

命題: 微分の母関数は母関数の微分

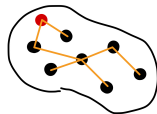
$$F_{\partial M} = \frac{d}{dx} F_M \text{ (普通の微分)}$$

例: $\partial \text{Triv} = \text{Triv}$
 $\rightsquigarrow \frac{d}{dx} e^x = e^x$

例: $\partial \text{IsEven} = \text{IsOdd}$
 $\rightsquigarrow \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \text{ (逆も然り)}$

例: $\partial \text{SubSet} = \text{SubSet} + \text{SubSet}$
 $\rightsquigarrow \frac{d}{dx} e^{2x} = e^{2x} + e^{2x}$

微分 ∂



演算 (3/4) 微分: Cycle の母関数

$$\begin{aligned}
 F_{\text{Cycle}}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\
 &= -\log(1-x)
 \end{aligned}$$

このことは, $\partial \text{Cycle} = \text{Arr}$ から $\frac{d}{dx} F_{\text{Cycle}}(x) = \frac{1}{1-x}$ が導かれることと整合的である.

演算 (3/4) 微分: Equiv

Species の等式 $\partial \text{Equiv} = \text{Triv} \times \text{Equiv}$ を用いて、
微分方程式

$$\frac{d}{dx} F_{\text{Equiv}}(x) = e^x F_{\text{Equiv}}(x)$$

を得る． 解くと，

$$F_{\text{Equiv}}(x) = e^{e^x - 1}$$

が分かる．

演算 (3/4) 微分: Equiv

Species の等式 $\partial \text{Equiv} = \text{Triv} \times \text{Equiv}$ を用いて、
微分方程式

$$\frac{d}{dx} F_{\text{Equiv}}(x) = e^x F_{\text{Equiv}}(x)$$

を得る． 解くと，

$$F_{\text{Equiv}}(x) = e^{e^x - 1}$$

が分かる． 次の"合成"を考えるととっても楽．

演算 (4/4) 合成

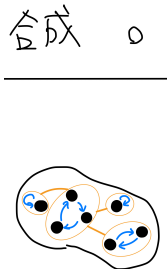
Species の合成

Species M, N について, 有限集合 A 上の $M \circ N$ -構造構造とは, A 上の同値関係 $\simeq$ と, 商集合 $A/\simeq$ 上の M 構造と各同値類上の N 構造の組のことをいう. (注)

例: $\text{Triv} \circ \text{Tree} = \text{Forest}$

例: $\text{Triv} \circ \text{Cycle} = \text{Per}$

例: $\text{Triv} \circ \text{ConnectedGraph} = \text{Graph}$



演算 (4/4) 合成

命題: 合成の母関数は母関数の合成

$$F_N(0) = 0 \text{ のとき, } F_{M \circ N} = F_M \circ F_N$$

例: $\text{Triv} \circ \text{Cycle} = \text{Per}$
 $\rightsquigarrow e^{F_{\text{Cycle}}(x)} = \frac{1}{1-x}$

例: $\text{Triv} \circ \text{IsNonEmpty} = \text{Equiv}$
 $\rightsquigarrow e^{e^x - 1} = F_{\text{Equiv}}(x)$

例: $\text{IsEven} \circ (\text{IsSingleton} + \text{IsSingleton}) =$
 $\text{IsEven} \times \text{IsEven} + \text{IsOdd} \times \text{IsOdd}$
 $\rightsquigarrow \cosh 2x = \cosh x^2 + \sinh x^2$

合成 $\circ$

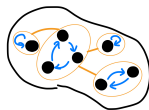


Table of Contents

- 1 導入: 組合せ論の世界と数の世界の不思議な対応
- 2 Species の定義
- 3 Species の操作
- 4 フラグ回収
- 5 メッセージ

導入のお話

n 種のお菓子を (複数食いアリで) 食べる方法の
Species TotalPreorder を考えると,

$$\text{TotalPreorder} = \text{Arr} \circ \text{IsNonEmpty}$$

$$\begin{aligned}\leadsto F_{\text{TotalPreorder}}(x) &= \frac{1}{1-x} \circ (e^x - 1) \\ &= \frac{1}{1 - (e^x - 1)} = \frac{1}{2 - e^x}\end{aligned}$$

導入のお話

$F_{\text{TotalPreorder}}(x) = \frac{1}{2-e^x}$ を等比級数の和の公式でバラすと

$$\begin{aligned} F_{\text{TotalPreorder}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{2^{n+1}} \right) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

を得る！

全体像

組合せ論	順序 of 非空(subsets) = 食べる
Species	Arr ◦ IsNonEmpty = TotalPreorder
母関数	合成を保つ!
関数	$\frac{1}{1-x} \circ (e^x - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$ 非自明!! $\frac{1}{2 - e^x}$ テイラー展開 $= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}}_{B_n} \right) \frac{x^n}{n!}$

Table of Contents

- 1 導入: 組合せ論の世界と数の世界の不思議な対応
- 2 Species の定義
- 3 Species の操作
- 4 フラグ回収
- 5 メッセージ

正直よくわからなかった人へ

母関数にはもっと簡単な話もある (すみません).

- ▶ 母関数としての二項展開
- ▶ 別の形の母関数 (通常型, ディリクレ型)
- ▶ 母関数を用いたフィボナッチ数の一般項
- ▶ (一般化) メビウス反転

正直よくわかった人へ

演習

- ▶ 元の species Element の母関数が xe^x であることを，直接計算と species の積の二通りで計算せよ.
- ▶ $\frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = (\frac{1}{1-x})^2$ の組合せ論的解釈は？ (Arr と Per それぞれ)
- ▶ $(xe^x)^2 = x \cdot x \cdot e^{2x}$ の組合せ論的解釈は？
- ▶ e^{2x} を $2x$ と e^x の合成として見てみると？
- ▶ 根つき木と $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k! 2^k e^{k/2}}$
- ▶ 根つき木の Species と反転公式
- ▶ 木の数え上げ問題

正直かなりよくわかった人へ

洞が気に気になっている個人的未解決問題集

- ▶ $\frac{d}{dx} \tan(x) = 1 + \tan(x)^2$ の組合せ論的解釈は？
(up/down numbers)
- ▶ ベルヌーイ数 $F_?(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ (拡張理論が必要)
- ▶ 置換群 species の母関数
- ▶ もっと圏論的な話 (私に聞いてください)