

アイゼンシュタイン整数と組合せ論

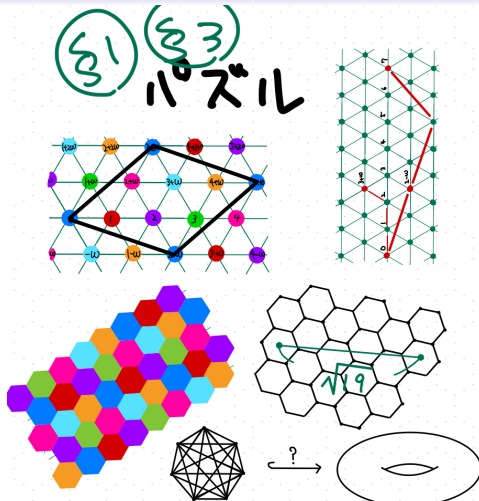
洞龍弥

東京大学数理科学研究科博士 1 年
国立情報学研究所 RA

2024 年 5 月 18 日

全体像(散弾銃的発表)

1, 3 章



アイゼンシュタイン **(§2)**
整数 $\mathbb{Z}[\omega]$

$$7 = (3 + \omega) \times (2 - \omega)$$

$$\mathbb{Z}[\omega] / (2 - \omega)$$

$$\cong \mathbb{F}_7$$

$$19 = (5 + 2\omega) \times (3 - 2\omega)$$

2 章

Table of Contents

- 1 導入: パズルと3で割って1余る素数
- 2 アイゼンシュタイン整数における素因数分解
- 3 広がり: パズルと3で割って1余る素数

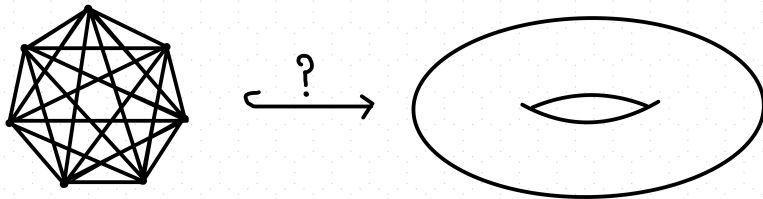
Table of Contents

- 1 導入: パズルと3で割って1余る素数
- 2 アイゼンシュタイン整数における素因数分解
- 3 広がり: パズルと3で割って1余る素数

曲面上の完全グラフ

問題: (2024/4/13 のトポス)

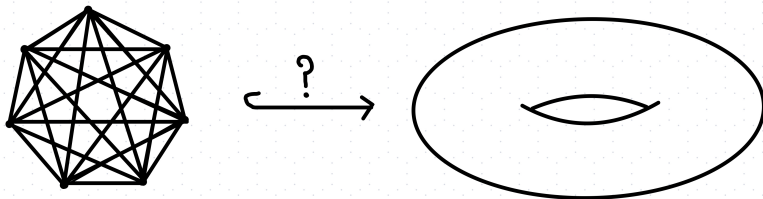
トーラス上に7次完全グラフを交差なしで描けるか？



曲面上の完全グラフ

問題: (2024/4/13 のトポス)

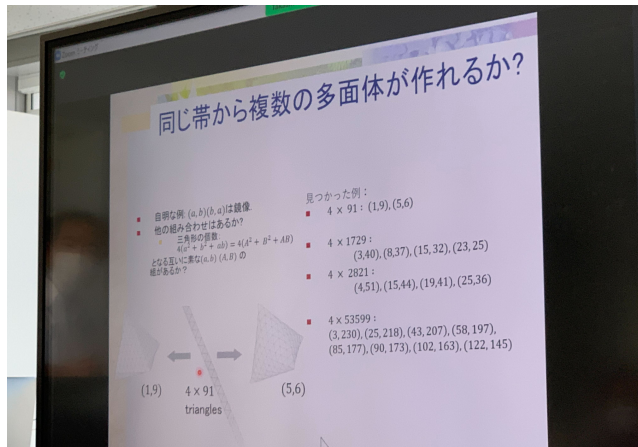
トーラス上に7次完全グラフを交差なしで描けるか？



実は $7 \equiv 1 \pmod{3}$ を利用して描ける！

ねじれた正四面体

北海道大学 (情報科学研究
院) の堀山貴史教授の「複数の多面体
の共通の展開図につ
いて」という講演
にて



ねじれた正四面体

北海道大学 (情報科学研究
院) の堀山貴史教授の「複数の多面体の共通の展開図について」という講演にて

以下の自然数の共通点は何か？

- ▶ 91
- ▶ 1729
- ▶ 2821
- ▶ 53599

ねじれた正四面体

北海道大学 (情報科学研究
院) の堀山貴史教授の「複数の多面体の共通の展開図について」という講演にて

以下の自然数の共通点は何か？

▶ $91 = 7 \times 13$

▶ $1729 = 7 \times 13 \times 19$

▶ $2821 = 7 \times 13 \times 31$

▶ $53599 = 7 \times 13 \times 19 \times 31$

mod 3 で 1 の素数たち !?

Table of Contents

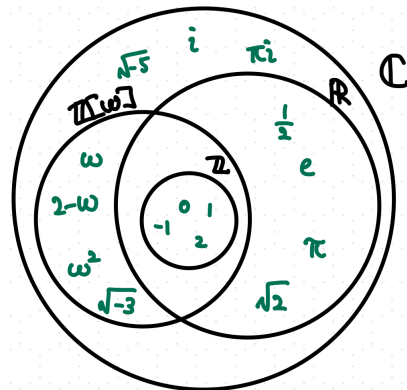
- 1 導入: パズルと3で割って1余る素数
- 2 アイゼンシュタイン整数における素因数分解
- 3 広がり: パズルと3で割って1余る素数

アイゼンシュタイン整数

定義

アイゼンシュタイン整数とは、
整数 $n, m \in \mathbb{Z}$ を用いて $n + m\omega$
と書ける複素数のこと。

アイゼンシュタイン整数の集合
を $\mathbb{Z}[\omega]$ と書く。

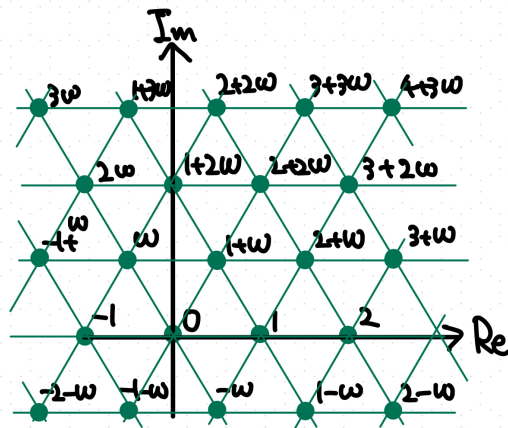


アイゼンシュタイン整数

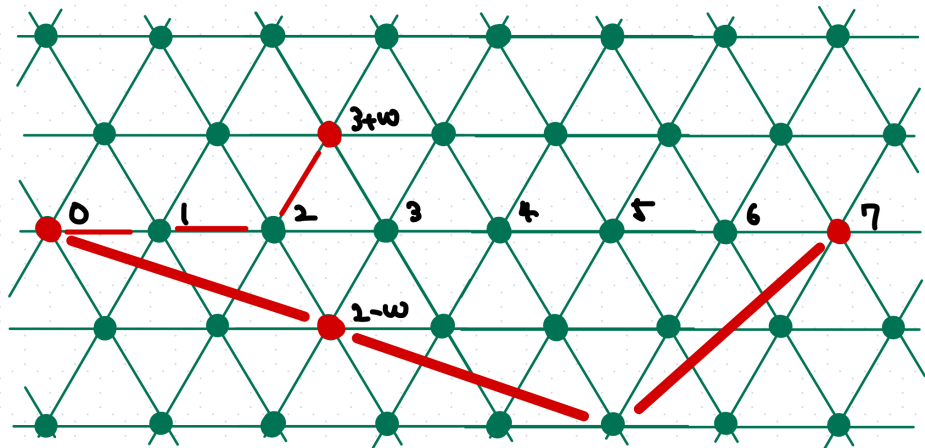
定義(再掲)

アイゼンシュタイン整数とは、整数 $n, m \in \mathbb{Z}$ を用いて $n + m\omega$ と書ける複素数のこと。

$\mathbb{Z}[\omega] \subset \mathbb{C}$ は格子状！



観察: $7 = (3 + \omega) \times (2 - \omega)$



他の素数の例

$$2 = 2$$

$$3 = (2 + \omega) \times (1 - \omega)$$

$$5 = 5$$

$$7 = (3 + \omega) \times (2 - \omega)$$

$$11 = 11$$

$$13 = (4 + \omega) \times (3 - \omega)$$

$$17 = 17$$

$$19 = (5 + 2\omega) \times (3 - 2\omega)$$

$$23 = 23$$

$$29 = 29$$

$$31 = (6 + \omega) \times (5 - \omega)$$

$$37 = (7 + 3\omega) \times (4 - 3\omega)$$

いつ素数 ($\in \mathbb{Z}$) は非自明な約数 ($\in \mathbb{Z}[\omega]$) を持つか？

主定理(ラフに)

定理

素数 $p \neq 3$ について,
 p は $\mathbb{Z}[\omega]$ で分解する $\iff p \equiv 1 \pmod{3}$

主定理(ラフに)

定理

素数 $p \neq 3$ について,
 p は $\mathbb{Z}[\omega]$ で分解する $\iff p \equiv 1 \pmod{3}$

数学科用: 左辺 $\iff \mathbb{Z}[\omega]/(p) \cong \mathbb{F}_p[x]/(x^2 + x + 1)$ が
整域でない

$\iff \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p^\times$ が位数3の元を持つ $\iff$
右辺

単元, 同伴, 素元

- ▶ **単元**とは, 絶対値が1のアイゼンシュタイン整数のこと.
- ▶ アイゼンシュタイン整数 α が**素元**であるとは, α は単元でなく, さらに自身の単元倍と単元以外で割り切れないこと.

単元 $1, \omega, \omega^2, -1, -\omega, -\omega^2$

素元 $2, 2\omega, 2\omega^2, -2, -2\omega, -2\omega^2, 2 + \omega, \dots$

その他 $0, 3, 4, 3 + 3\omega, \dots$

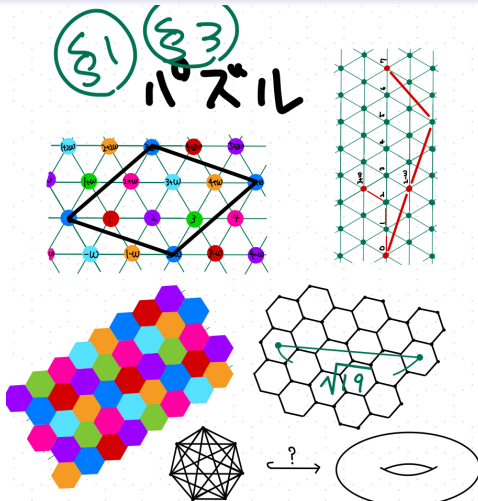
主定理 (厳密に)

定理

素数 $p \neq 3$ について,
 p は $\mathbb{Z}[\omega]$ で素元でない $\iff p \equiv 1 \pmod{3}$

全体像(散弾銃的発表)

1, 3 章



アイゼンシュタイン $\S 2$
整数 $\mathbb{Z}[\omega]$

$$7 = (3 + \omega) \times (2 - \omega)$$

$$\mathbb{Z}[\omega] / (2 - \omega)$$

$$\cong \mathbb{F}_7$$

$$19 = (5 + 2\omega) \times (3 - 2\omega)$$

2 章

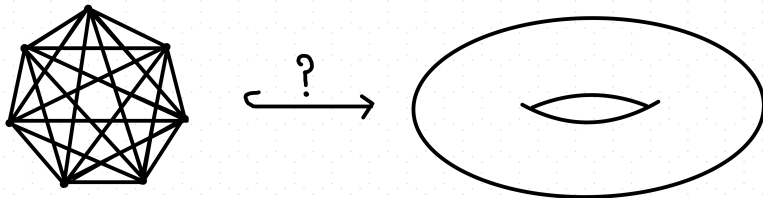
Table of Contents

- 1 導入: パズルと3で割って1余る素数
- 2 アイゼンシュタイン整数における素因数分解
- 3 広がり: パズルと3で割って1余る素数

再会！：曲面上の完全グラフ

問題: (2024/4/13 のトポス)

トーラス上に7次完全グラフを交差なしで描けるか？



実は $7 \equiv 1 \pmod{3}$ を利用して描ける！

再会！：曲面上の完全グラフ

$\mathbb{Z}[\omega]$ を $\text{mod } (2 - \omega)$ で考えると、アイゼンシュタイン整数は $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ のどれか一つと合同になる！

数学科用: $\mathbb{Z}[\omega]/(2 - \omega) \cong \mathbb{F}_7$

例: $5 + 18\omega \equiv 5 + 18 \times 2 = 41 \equiv 6 \pmod{2 - \omega}$

再会！：曲面上の完全グラフ

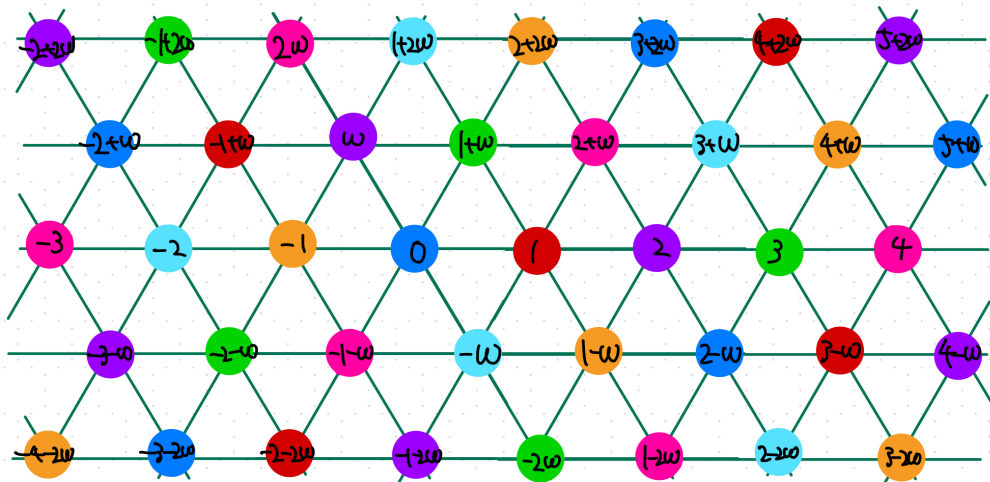
$\mathbb{Z}[\omega]$ を $\text{mod } (2 - \omega)$ で考えると，アイゼンシュタイン整数は $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ のどれか一つと合同になる！

数学科用: $\mathbb{Z}[\omega]/(2 - \omega) \cong \mathbb{F}_7$

例: $5 + 18\omega \equiv 5 + 18 \times 2 = 41 \equiv 6 \pmod{2 - \omega}$

背後には， $(2 - \omega) \mid 7$ や $7 \equiv 1 \pmod{3}$ がある．

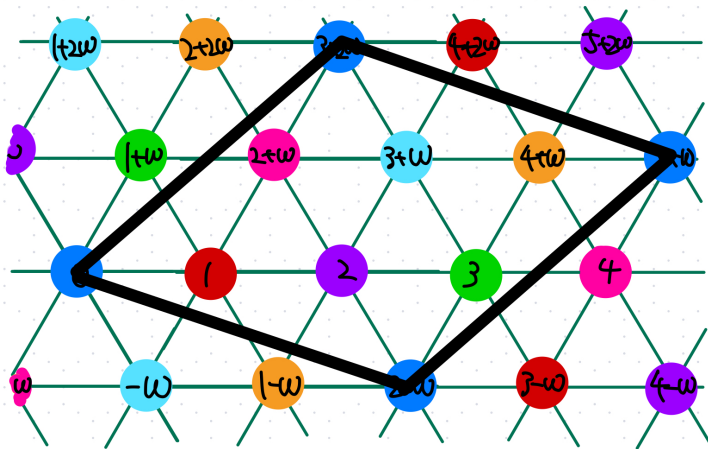
再会！：曲面上の完全グラフ



再会！：曲面上の完全グラフ

答え：数学科用：

$$\mathbb{F}_7 \cong \mathbb{Z}[\omega]/(2 - \omega) \hookrightarrow \mathbb{C}/(2 - \omega)\mathbb{Z}[\omega] \cong T^2$$



空間の彩色数: Hadwiger–Nelson problem

未解決問題

平面 ($\mathbb{R}^2$) を，距離がちょうど1の2点が異なる色で塗られるように彩色するには，何色必要か？

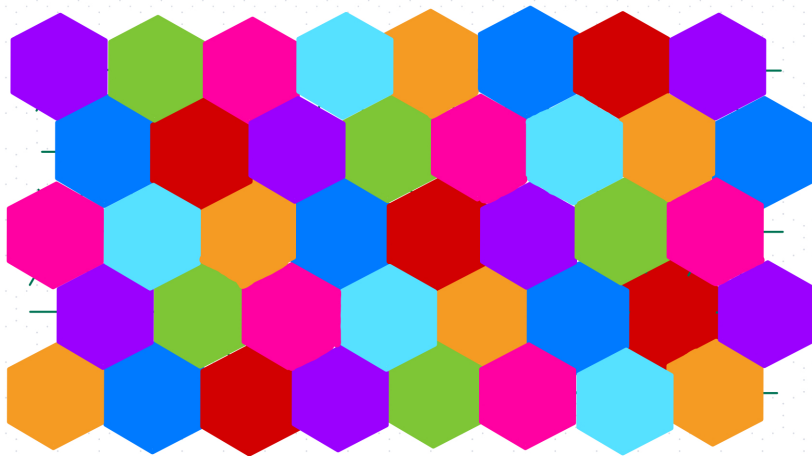
空間の彩色数: Hadwiger–Nelson problem

未解決問題

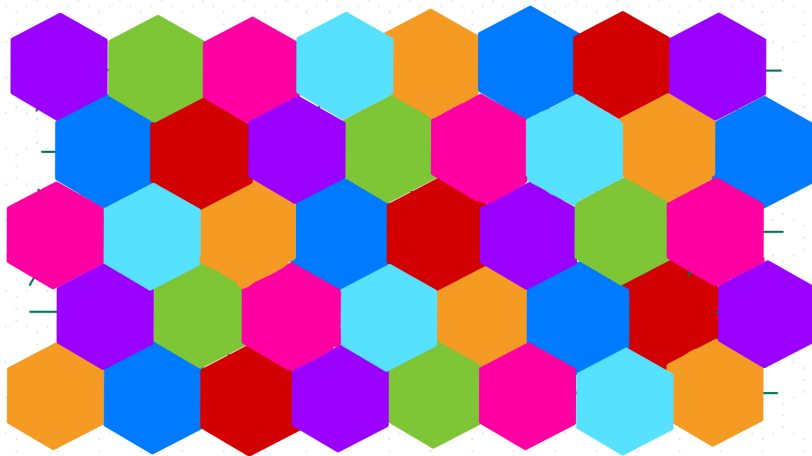
平面 ($\mathbb{R}^2$) を, 距離がちょうど1の2点が異なる色で塗られるように彩色するには, 何色必要か?

人類の進捗: 5, 6, 7 のどれか

空間の彩色数: 7色の構成

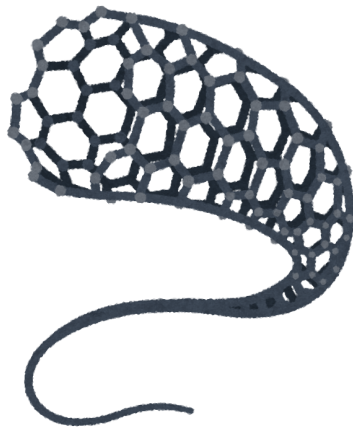


空間の彩色数: 7色の構成



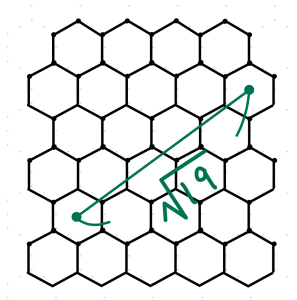
カーボンナノチューブ

同じ円周長のカーボンナノチューブは(回転や反転の対称性を除いて)何通りあるだろうか？



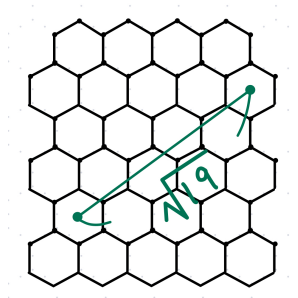
カーボンナノチューブ

カーボンナノチューブの巻き方は、アイゼンシュタイン整数で与えられる(カイラリティ)！



カーボンナノチューブ

カーボンナノチューブの巻き方は、アイゼンシュタイン整数で与えられる(カイラリティ)！



同じ絶対値のアイゼンシュタイン整数はどのくらいあるか？ $|n + m\omega| = \sqrt{n^2 - nm + m^2}$

カーボンナノチューブ

- ▶ アイゼンシュタイン整数の絶対値は $\sqrt{n}$ の形.
- ▶ 絶対値 $\sqrt{n}$ のアイゼンシュタイン整数は, n が素因数分解でバラバラになるほど多い!

カーボンナノチューブ

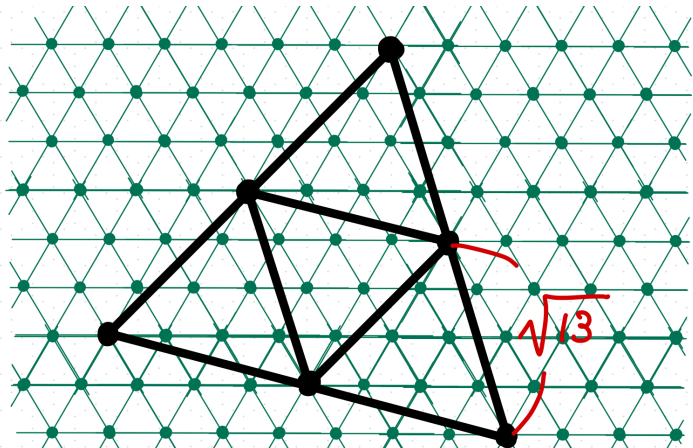
- ▶ アイゼンシュタイン整数の絶対値は $\sqrt{n}$ の形.
- ▶ 絶対値 $\sqrt{n}$ のアイゼンシュタイン整数は, n が素因数分解でバラバラになるほど多い!

例: 絶対値 $\sqrt{p}$ は,

- ▶ $p \equiv 1 \pmod{3}$ なら 2×6 個.
- ▶ $p \equiv 2 \pmod{3}$ なら 0 個.

ねじれた正四面体

正四面体の展開
図をナナメに配
置して組み立
てる！



疑問

- ▶ カーボンナノチューブがいつ半導体になるのか、カイラリティと $\text{mod } 3$ でわかるらしい？関係するのだろうか
- ▶ 彩色問題の高次元版にも同様に"整数論的構成"があるか？
- ▶ ねじれ正四面体の亜種を整数論的に構成できるか？