



$\varphi ::= P \mid \top \mid \perp \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \neg \varphi$

$\varphi \Rightarrow \psi$
 $\varphi \wedge \psi$

$\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$

$x : B \rightarrow 2, x(b)=1$

$\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \cap \llbracket \psi \rrbracket$

ベン図からトポスへ 論理 $\leftrightarrow$ 幾何

洞龍弥 数理空間トポス 新歓 2026 2026年5月23日

オイラーの手紙

これらの**丸い図形**，いやむしろ
（どのような形を与えようとも
かまわないのですから）**空間**は， [...] **論理学**の中で自慢げに語られ，
多大な苦勞をして証明される神秘の全てを，
私たちに明らかにしてくれるのです。



ドイツ王女への手紙，引用者訳，強調

煽ってない？

目次

- 1 ベン図 ← 嘘つきパズル
- 2 Stone 双対 ← 1 億円パズル
- 3 Locale ← 繋がった空間を扱いたい
- 4 トポス ← 量化子 $\exists, \forall$ を扱いたい

目次

- 1 ベン図 ← 嘘つきパズル
- 2 Stone 双対 ← 1 億円パズル
- 3 Locale ← 繋がった空間を扱いたい
- 4 トポス ← 量子子 $\exists, \forall$ を扱いたい

論理パズル(1/2) 嘘つきは誰か？

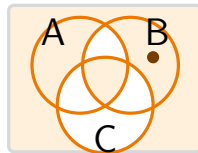
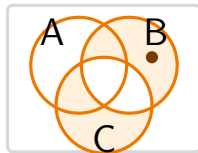
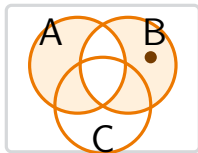


「B が嘘つき」 「C が嘘つき」 「A も B も正直」

論理パズル(2/2) ベン図で“視覚的に”理解する



「B は嘘つき」 「C は嘘つき」 「A も B も正直」



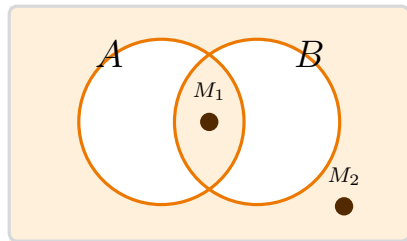
答え: A と C が嘘, B が正直

視点：可能世界 $\leftrightarrow$ 点

可能世界の配置空間



「B は正直」「A は正直」

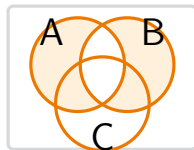


(注意: 可能世界とモデルを意図的に混同しているが、そこまで悪くない嘘である。)

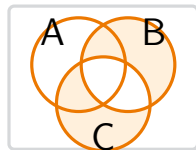
視点：矛盾 $\iff$ 無



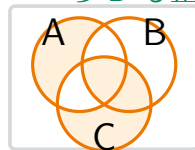
「B は嘘つき」



「C は嘘つき」



「A が正直なら B も正直」



矛盾

無

対応表: 論理と幾何

論理	幾何
命題	(開) 部分 (集合)
論理積	共通部分
可能世界	点
論理包含	(幾何的) 包含
完全性	点の存在
ブール代数	Stone 空間
直観主義 (無限) 命題論理	Locale(滑らかな空間)
量子子	層
トポス (理論)	トポス (空間)

目次

- 1 ベン図 ← 嘘つきパズル
- 2 Stone 双対 ← 1 億円パズル
- 3 Locale ← 繋がった空間を扱いたい
- 4 トポス ← 量子子 $\exists, \forall$ を扱いたい

論理パズル: この人から1億円もらおう!

絶対約束守るマンがやってきて、言った.

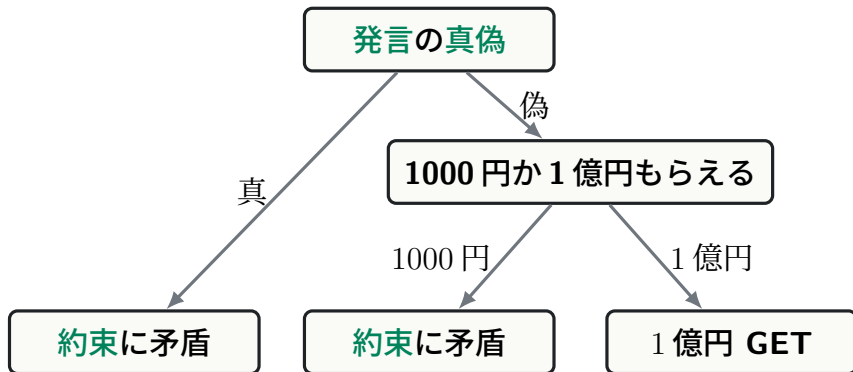


正しいことを言った
ら 1000 円あげるよ,
けど間違ったことを言っ
たら 1000 円あげない

どう発言すれば1億円をもらえるか? (メタ可)

論理パズル: 普通の解法

答:「あなたは、私に 1000 円をくれず、かつ 1 億円もくれない。」



論理の代数 (1/2): ブール代数の定義

パズルを方程式で解こう！

Definition (ブール代数 (雑))

ブール代数とは、足し算と掛け算ができて^a,

$$x^2 = x$$

を満たすもの。

^a環

Example (命題のブール代数)

0	$\perp$
$p + q$	$p \not\leftrightarrow q$
1	$\top$
$\times$	$p \wedge q$

$1 + p$	$\neg p$
$1 + p + q$	$p \leftrightarrow q$

論理の代数 (2/2): ブール代数は便利

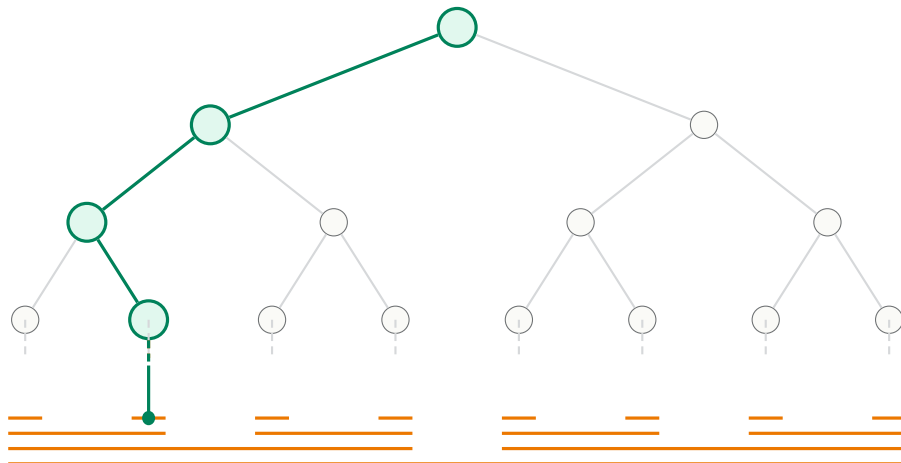
もらえる額 n が満たしてほしい条件:

$$\left(\boxed{n = 10^3} \leftrightarrow \boxed{\text{発言}} \right) = \boxed{n = 10^8}$$

$$\begin{aligned} 1 + \boxed{n = 10^3} + \boxed{\text{発言}} &= \boxed{n = 10^8} \\ \boxed{\text{発言}} &= \boxed{n = 10^8} + \boxed{n = 10^3} + 1 \\ &= \boxed{n = 10^8} \leftrightarrow \boxed{n = 10^3} \\ &= \boxed{n \neq 10^3, 10^8} \end{aligned}$$

(cf. string)

幾何側：発言の無限選択 $\leftrightarrow$ Cantor空間の点



$2^{\mathbb{N}}$

定理: Stone 双対

($2^{\mathbb{N}}$ のように) バラバラでパンパンな空間¹ を **Stone 空間** と呼ぶ。

ブール代数 $\longleftrightarrow$ **Stone 空間**

Theorem (Stone 双対)

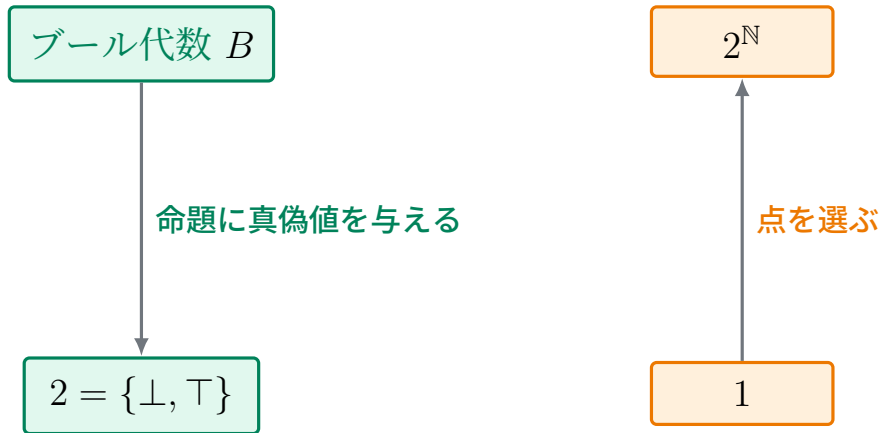
ブール代数 と **Stone 空間** は等価^a。

^a反変圏同値

[Sto36], [Joh82]

¹totally disconnected compact Hausdorff topological space です, すみません

視点： 可能世界 = 点, 再び



対応表: 論理と幾何

論理	幾何
命題	(開) 部分 (集合)
論理積	共通部分
可能世界	点
論理包含	(幾何的) 包含
完全性	点の存在
ブール代数	Stone 空間
直観主義 (無限) 命題論理	Locale(滑らかな空間)
量子子	層
トポス (理論)	トポス (空間)

目次

- 1 ベン図 ← 嘘つきパズル
- 2 Stone 双対 ← 1 億円パズル
- 3 Locale ← 繋がった空間を扱いたい
- 4 トポス ← 量子子 $\exists, \forall$ を扱いたい

論理の不満, 幾何の不満

Stone 双対では論理も幾何も, 全然足りない!

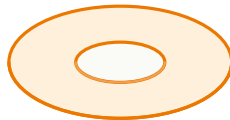
論理の不満

量子子 $\exists, \forall$ がない!

$\forall x, \exists y, x = y^2 \leftarrow$ 欲しい

幾何の不満

空間がバラバラ!



$\leftarrow$ 欲しい

幾何の不満: 空間がバラバラすぎる!

直観主義論理

繋がった空間

排中律 $p \vee \neg p$ が, 空間をバラバラにする



$$U \vee \neg U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

空間を，開集合＝命題で再定義する

Definition (Locale)

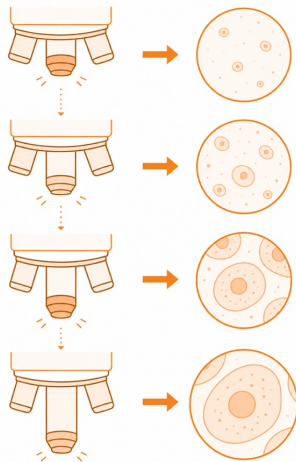
Locale とは，(点ではなく) 開集合で定義される空間^a

^a厳密には任意 join と有限 meet を持ち，分配法則

$$a \wedge \bigvee_i b_i = \bigvee_i (a \wedge b_i)$$

を満たす順序構造の形式的双対.

繋がった空間にも論理が対応する



対応表: 論理と幾何

論理	幾何
命題	(開) 部分 (集合)
論理積	共通部分
可能世界	点
論理包含	(幾何的) 包含
完全性	点の存在
ブール代数	Stone 空間
直観主義 (無限) 命題論理	Locale(滑らかな空間)
量子子	層
トポス (理論)	トポス (空間)

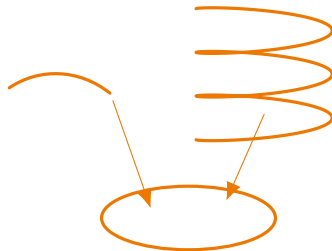
目次

- 1 ベン図 ← 嘘つきパズル
- 2 Stone 双対 ← 1 億円パズル
- 3 Locale ← 繋がった空間を扱いたい
- 4 トポス ← 量子子 $\exists, \forall$ を扱いたい

量子化と 層：コト (2) からモノ (Set) へ!

	論理	幾何
コト	命題	開集合
モノ	量子化	層

$$\exists x \varphi(x), \forall x \varphi(x)$$



トポスは何者なのか

F. W. Lawvere

トポスは
量子子を
扱える論理だ

トポスは
繋がった空間を
扱える幾何だ

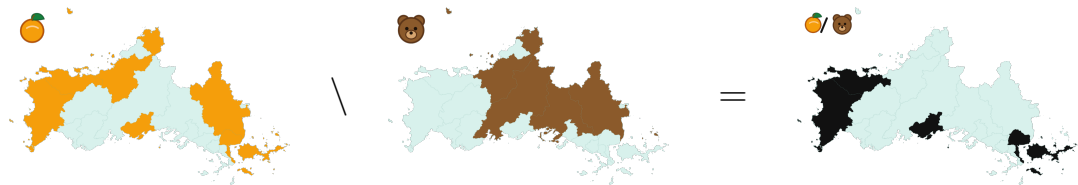
A. Grothendieck

対応表: 論理と幾何

論理	幾何
命題	(開) 部分 (集合)
論理積	共通部分
可能世界	点
論理包含	(幾何的) 包含
完全性	点の存在
ブール代数	Stone 空間
直観主義 (無限) 命題論理	Locale(滑らかな空間)
量子子	層
トポス (理論)	トポス (空間)

視点：論理と幾何の対応は奇跡なのか？

具体計算を知れば知るほど奇跡に見えてくるが...



出典: 国土数値情報（国土交通省）・山口県オープンデータ「熊の目撃情報」, いずれも CC BY 4.0, 加工して作成

参考文献 I

- [Joh82] Peter T. Johnstone. *Stone spaces*. Vol. 3. Cambridge University Press, 1982.
- [Sto36] Marshall H. Stone. “The theory of representation for Boolean algebras”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 40.1 (1936), pp. 37–111.