構成的数学と表現論

Topos 入門

洞龍弥

東京大学数理科学研究科修士 2 年

2023 年 12 月 7 日
数学基礎論若手の会 2023

はじめに

トポスのテーマは，その広がりにおいては，はるかに源になったスキームのテーマを超えています．幾何学と代数，トポロジーと数論，数理論理とカテゴリー論，連続の世界と「不連続」または「離散」構造の世界が結び合う，この「ベッド」，あるいはこの「深い川」は，スキームのテーマではなくて，トポスのテーマです．*(Grothendieck*「収穫と蒔いた種と」辻雄一訳*)*

目的

以下を伝えること

- Topos 理論のラフなアイデアのうち 1 つ
- 構成的数学は，topos 理論を通じて様々な数学 (or 数理科学) とつながる．
- 特に，構成的線型代数[1] は群や箙の表現に新たな視点を与える．

[1] 本当は局所環上の加群論

目的

以下を伝えること

- Topos 理論のラフなアイデアのうち 1 つ
- 構成的数学は，topos 理論を通じて様々な数学 (or 数理科学) とつながる．
- 特に，構成的線型代数[1] は群や箙の表現に新たな視点を与える．
- 一緒にやりませんか?

[1] 本当は局所環上の加群論

Table of Contents

1. こんなところに構成的数学
2. 空間としての topos
3. 集合論の宇宙としての topos
4. 表現論へ

Table of Contents

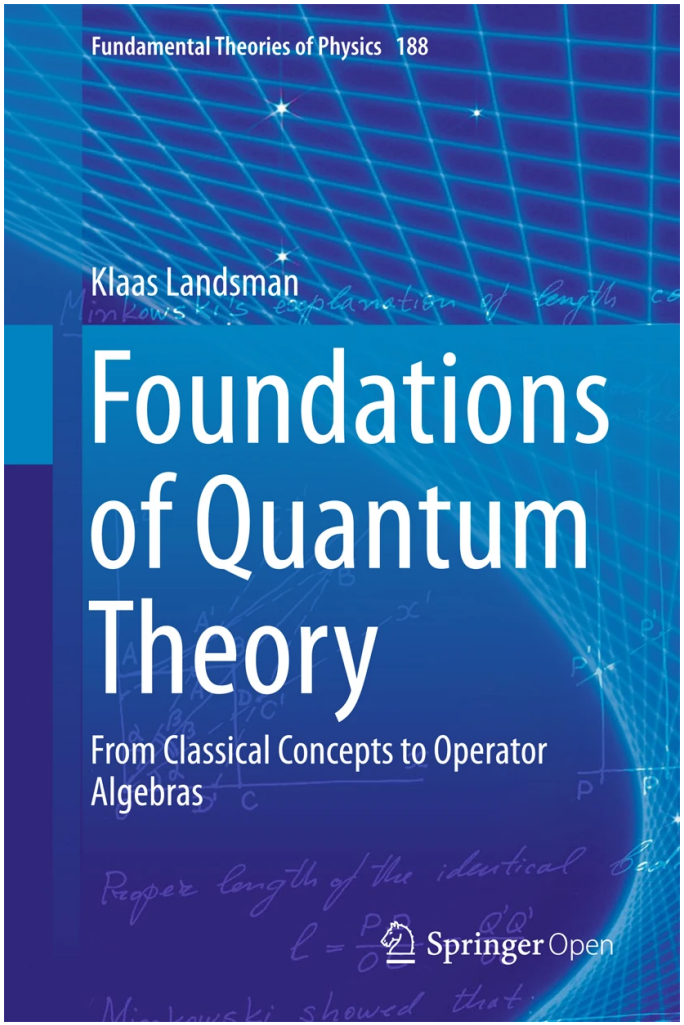
1. こんなところに構成的数学
2. 空間としての topos
3. 集合論の宇宙としての topos
4. 表現論へ

本節のメッセージ

この Section で伝えること:

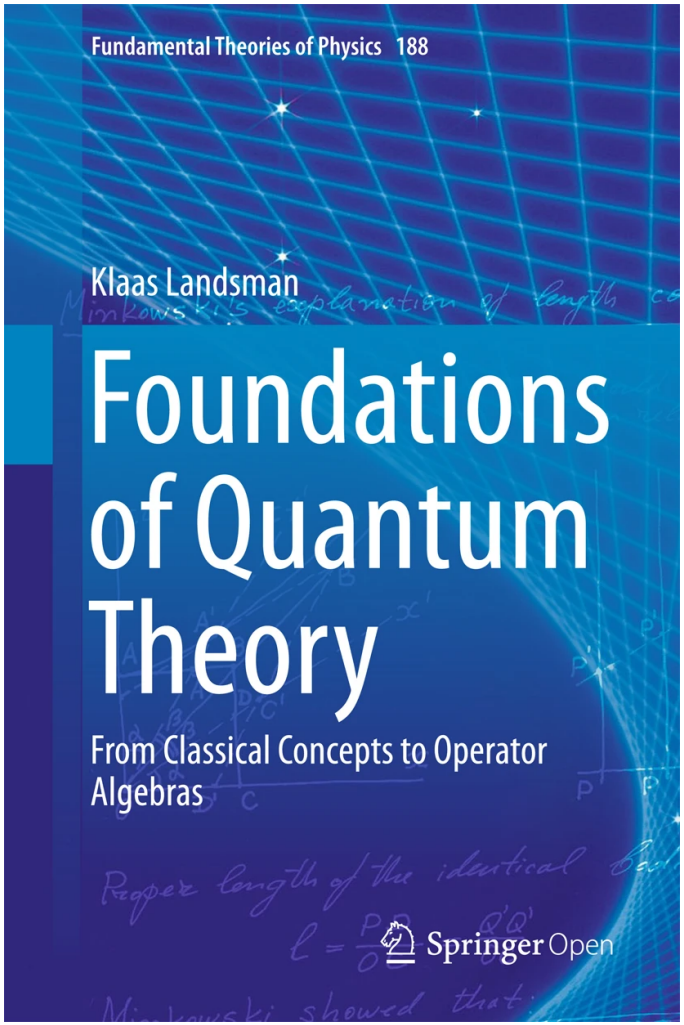
- 構成的数学の応用としての topos の魅力
- 構成的数学は，数学の諸分野や数理科学に応用を持っていること
- Topos はそれを仲介していること

その1: 量子基礎論



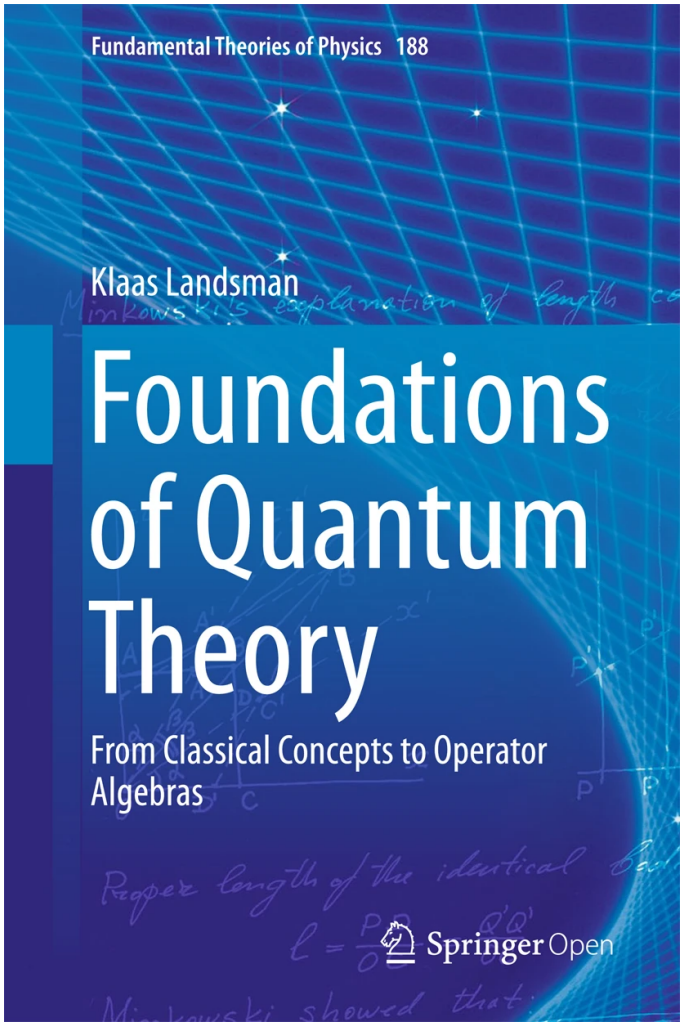
- 2017 年出版，cited by 237.

その1: 量子基礎論



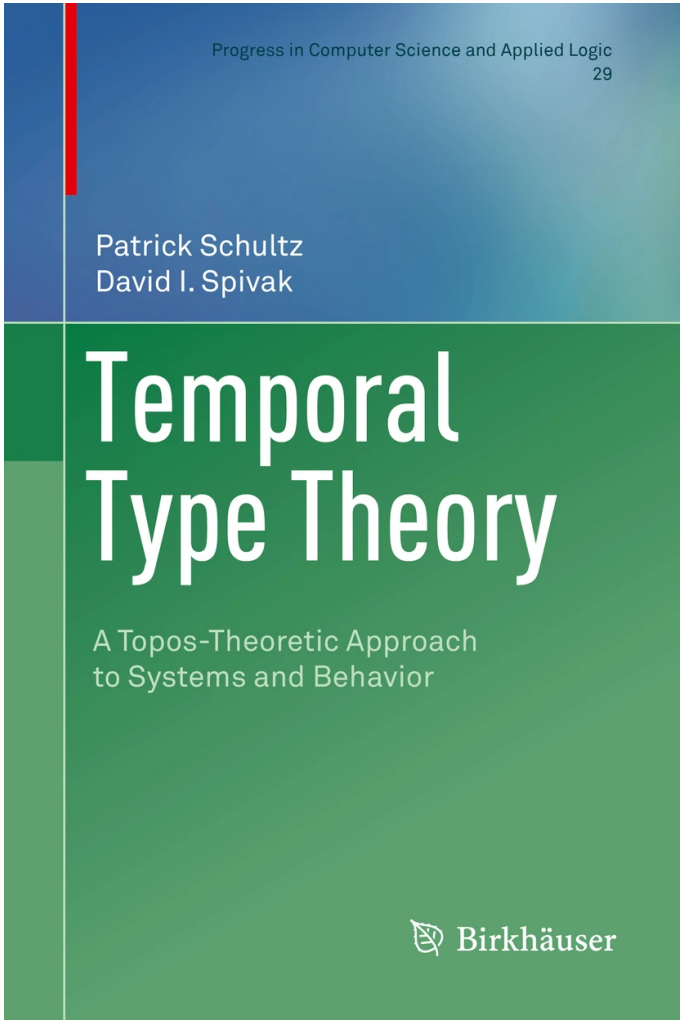
- 2017年出版，cited by 237.
- §12.2 The Gelfand spectrum in constructive mathematics

その1: 量子基礎論



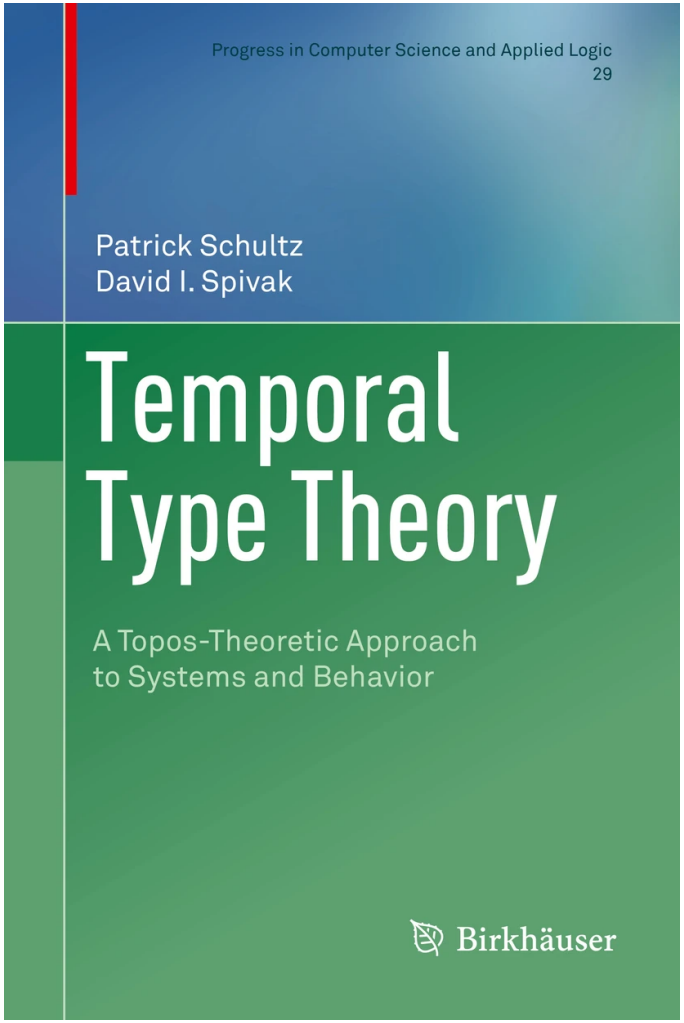
- 2017 年出版，cited by 237.
- §12.2 The Gelfand spectrum in constructive mathematics
- Grothendieck は「収穫と蒔いた種と」で予言していた...

その 2: Type theory とモデル検査



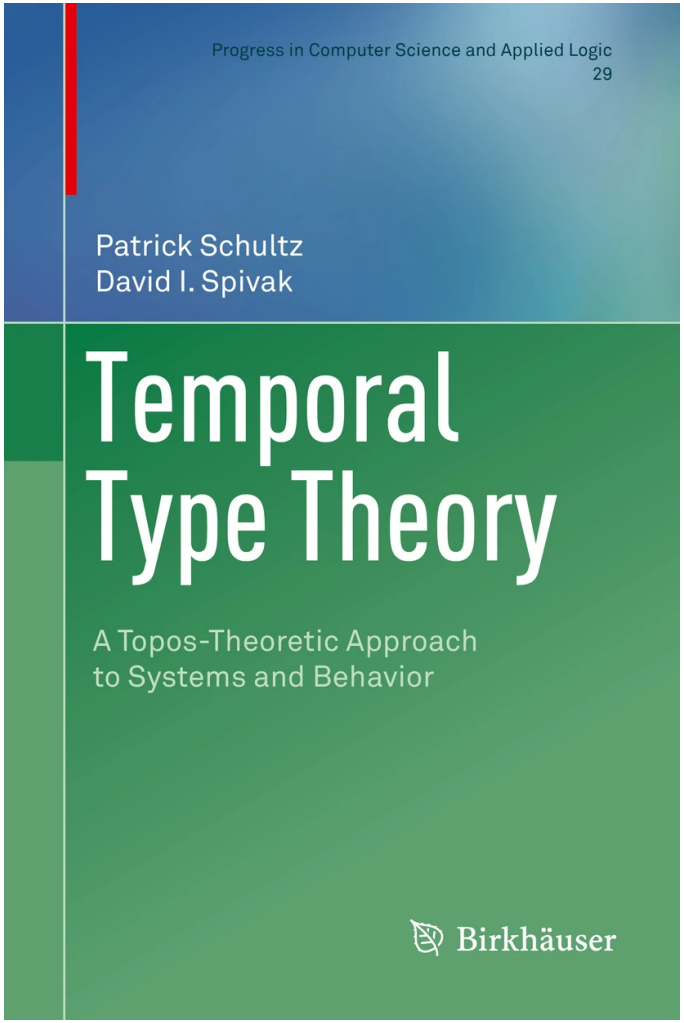
- 2019 年出版. 時制論理.

その 2: Type theory とモデル検査



- 2019 年出版. 時制論理.
- “ [...], we use a simplified version of the safe separation problem for airplanes in the US National Airspace System (NAS). ”

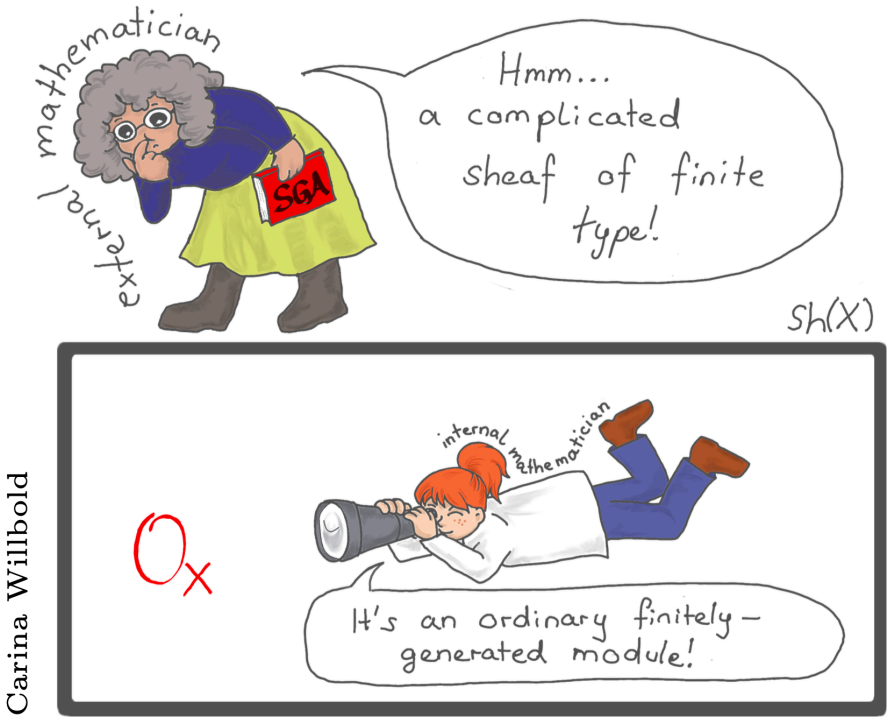
その 2: Type theory とモデル検査



- 2019 年出版. 時制論理.
- “ [...], we use a simplified version of the safe separation problem for airplanes in the US National Airspace System (NAS). ”
- “ What will matter most is that our type theory is constructive and [...] ”

その 3: 代数幾何

Using the internal language of toposes in algebraic geometry



Carina Willbold

- Ingo Blechschmidt の博論. 2017 年
- “ One way this thesis contributes to the program of constructive mathematics is that intuitionistic mathematics gains new areas of application. ”

Toposへ

Q: では，構成的数学とこれらの諸々の topic を繋ぐものは何か？

Topos へ

Q: では，構成的数学とこれらの諸々の topic を繋ぐものは何か？

A: 実は，topos 理論！

Topos へ

Q: では，構成的数学とこれらの諸々の topic を繋ぐものは何か？

A: 実は，topos 理論！

topos は何者で，どこで生まれたのか？

本節のメッセージ(再掲)

この Section で伝えること:

- 構成的数学の応用としての topos の魅力
- 構成的数学は，数学の諸分野や数理科学に応用を持っていること
- Topos はそれを仲介していること

Table of Contents

1. こんなところに構成的数学
2. 空間としての topos
3. 集合論の宇宙としての topos
4. 表現論へ

本節のメッセージ

この Section で伝えること:

- Grothendieck による空間概念の革命が topos を生み出した
- Topos[2] は「空間内の点の集合」ではなく「空間上の構造の圏」である
- 群作用集合や箙作用集合といった “表現論の素材” も topos を為す

[2] に対する無数の視点のうちの一つを非常に単純化したもの

Grothendieck の洞察

Grothendieck は，彼の著書「Récoltes et Semailles」で次のように述べている．

> 今後「層の圏」と呼ばれるこの種の測量超構造 *(superstructure d'arpentage)* は，空間にとって最も本質的なものの具現化 *(incarnant)* とみなされるだろう．

Grothendieck の洞察

Grothendieck は，彼の著書「Récoltes et Semailles」で次のように述べている．

> 今後「層の圏」と呼ばれるこの種の測量超構造 *(superstructure d'arpentage)* は，空間にとって最も本質的なものの具現化 *(incarnant)* とみなされるだろう．

(過度に) 単純化すれば，次のような転換が起こっている!

位相空間	空間は何から構成されるか
topos	空間から何が構成されるか

Grothendieck topos の定義

Def: Grothendieck topos

圏 $\mathcal{E}$ が Grothendieck topos であるとは，以下の同値な条件を満たすことを言う．

- Site[3] $(\mathcal{C}, J)$ 上の層の圏 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ と圏同値．
- ある前層圏 $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ への full embedding と lex reflector を持つ．

重要なことは，topos は「空間内の点の集合」ではなく「空間上の構造の圏」であること！

[3] 位相空間のある種の一般化

Grothendieck topos の (恣意的な) 例

- 位相空間 X 上の層の圏 $\mathbf{Sh}(X)$
- 集合の圏 $\mathbf{Set}(= \mathbf{Sh}(1))$
- Cohen forcing poset $\mathbb{P}$ 上の (desne-) 層の圏 $\mathbf{Cohen} = \mathbf{Sh}(\mathbb{P}, \neg\neg)$
- 群作用の圏 G-$\mathbf{Set}$
- 位相群 G の連続作用の圏 $\mathbf{Cont}(G)$
- 箙 Q の作用の圏 Q-$\mathbf{Set}$
- 離散力学系の圏 σ-$\mathbf{Set}$
- 有向グラフの圏 $\mathbf{DirGraph}$
- 自由モノイド Σ_A 作用の圏 $\mathbf{Automata}_A$
- Simplicial set の圏 $\mathbf{sSet}$

本節のメッセージ

この Section で伝えること:

- Grothendieck による空間概念の革命が topos を生み出した
- Topos[4] は「空間内の点の集合」ではなく「空間上の構造の圏」である
- 群作用集合や箙作用集合といった “表現論の素材” も topos を為す

[4] に対する無数の視点のうちの一つを非常に単純化したもの

Table of Contents

1. こんなところに構成的数学
2. 空間としての topos
3. 集合論の宇宙としての topos
4. 表現論へ

本節のメッセージ

この Section で伝えること:

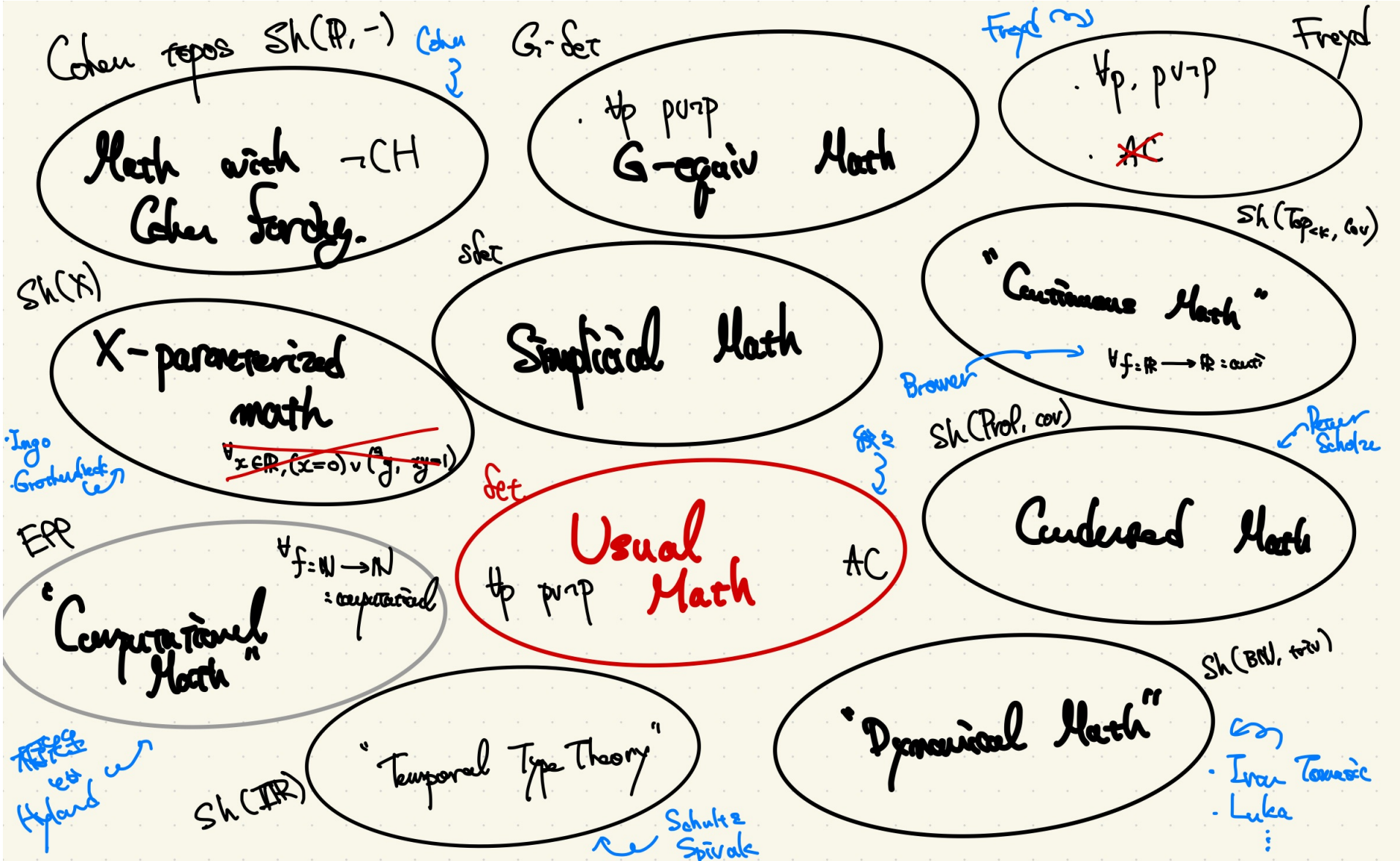
- 各 topos は，それ固有の “内部数学” を持つ．(なんかパラレルワールドの覗き穴みたいでめちゃめちゃワクワクする!!)
- “内部数学” の共通言語は構成的数学である．

本節のメッセージ

この Section で伝えること:

- 各 topos は，それ固有の “内部数学” を持つ．(なんかパラレルワールドの覗き穴みたいでめちゃめちゃワクワクする!!)
- “内部数学” の共通言語は構成的数学である．
- 夢が広がる

いろんなトポス，いろんな数学



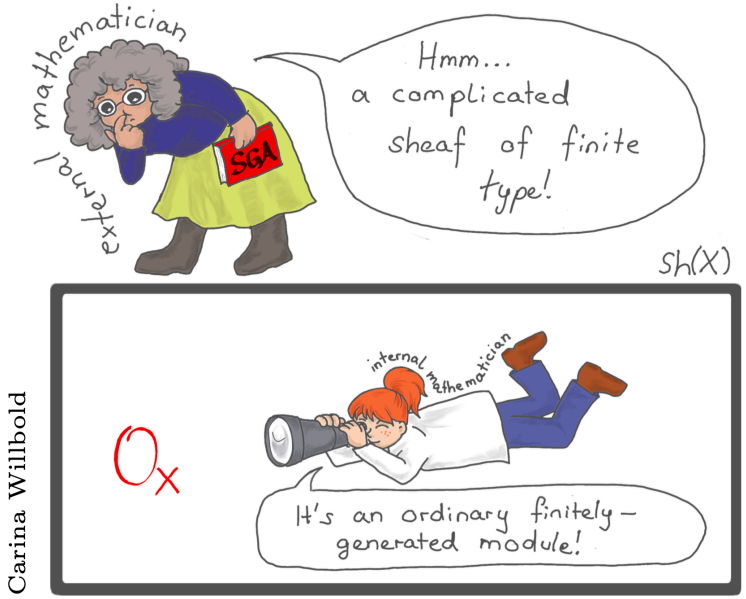
どう嬉しいか1: アリアドネの糸

[...] the universe of sets can be replaced by an arbitrary base topos, and that it should be possible to reprise interesting topics and chapters of classical mathematics in the new context.
We cling to this principle as a kind of **Ariadne's thread**, *guiding us out of the labyrinth of guesswork [...]*

(Ivan Tomašić, A topos-theoretic view of difference algebra, 2020)

どう嬉しいか2: 単純化

Using the internal language of toposes in algebraic geometry



Carina Willbold

We investigate how the internal language of the little Zariski topos can be exploited to give simpler definitions and more conceptual proofs of the basic notions and observations in algebraic geometry.

(Ingo Blechschmidt, Using the internal language of toposes in algebraic geometry, 2017)

どう嬉しいか3: 色んな世界の比較！

いろんな性質の世界を作れる！

> *[...] it is natural to ask whether there are perhaps topoi which resemble Brouwer's world to such an extent that all functions from reals to reals are continuous.*

(Mac Lane and Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, 1992)

数学的類似を,「宇宙を取り替えただけ！」って説明できたら，アツい !!

本節のメッセージ

この Section で伝えること:

- 各 topos は，それ固有の “内部数学” を持つ．(なんかパラレルワールドの覗き穴みたいでめちゃめちゃワクワクする!!)
- “内部数学” の共通言語は構成的数学である．

本節のメッセージ

この Section で伝えること:

- 各 topos は，それ固有の “内部数学” を持つ．(なんかパラレルワールドの覗き穴みたいでめちゃめちゃワクワクする!!)
- “内部数学” の共通言語は構成的数学である．
- 夢が広がる

Table of Contents

1. こんなところに構成的数学
2. 空間としての topos
3. 集合論の宇宙としての topos
4. 表現論へ

本節のメッセージ

この Section で伝えること:

- 私は最近 Topos 内の線型代数に興味を持っている.
- Topos 内の線型代数は，外から見れば圏 (⊃ 群, 箙) の表現 (やベクトル束) などになっている.
- 原理的には各種表現論の諸所の差異は，構成的数学をベースにした逆数学と関連するはず.
- 夢の一つは，Gabriel の定理を構成的逆数学の観点から再解釈したい.

Topos 内の $\mathbb{C}$ 線型空間

Topos	set	LEM	AC	$\mathbb{C}$-v.s.	c.r.	f.r.t.
Set	set	✓	✓	$\mathbb{C}$-v.s.	✓	✓

Topos 内の $\mathbb{C}$ 線型空間

Topos	set	LEM	AC	$\mathbb{C}$-v.s.	c.r.	f.r.t.
Set	set	✓	✓	$\mathbb{C}$-v.s.	✓	✓
$\mathfrak{S}_n$-**Set**	$\mathfrak{S}_n$-set	✓	✓	$\mathfrak{S}_n$-rep.	✓	✓
$\mathbb{Z}$-**Set**	$\mathbb{Z}$-set	✓	✓	$\mathbb{Z}$-rep.	×	?
Cont$(\hat{\mathbb{Z}})$	$\hat{\mathbb{Z}}$-set	✓	×	con.$\hat{\mathbb{Z}}$-rep.	?	?

Topos 内の $\mathbb{C}$ 線型空間

Topos	set	LEM	AC	$\mathbb{C}$-v.s.	c.r.	f.r.t.
Set	set	✓	✓	$\mathbb{C}$-v.s.	✓	✓
$\mathfrak{S}_n$-**Set**	$\mathfrak{S}_n$-set	✓	✓	$\mathfrak{S}_n$-rep.	✓	✓
$\mathbb{Z}$-**Set**	$\mathbb{Z}$-set	✓	✓	$\mathbb{Z}$-rep.	×	?
Cont$(\hat{\mathbb{Z}})$	$\hat{\mathbb{Z}}$-set	✓	×	con.$\hat{\mathbb{Z}}$-rep.	?	?
$\to$-**Set**	function	×	×	$V \to W$	×	✓
$\rightrightarrows$-**Set**	graph	×	×	$V \rightrightarrows W$	×	×
$\circlearrowright$-**Set**	dyn.sys.	×	×	$V \to V$	×	×

Topos 内の $\mathbb{C}$ 線型空間

Topos	set	LEM	AC	$\mathbb{C}$-v.s.	c.r.	f.r.t.
Set	set	✓	✓	$\mathbb{C}$-v.s.	✓	✓
$\mathfrak{S}_n$-**Set**	$\mathfrak{S}_n$-set	✓	✓	$\mathfrak{S}_n$-rep.	✓	✓
$\mathbb{Z}$-**Set**	$\mathbb{Z}$-set	✓	✓	$\mathbb{Z}$-rep.	×	?
Cont$(\hat{\mathbb{Z}})$	$\hat{\mathbb{Z}}$-set	✓	×	con.$\hat{\mathbb{Z}}$-rep.	?	?
$\to$-**Set**	function	×	×	$V \to W$	×	✓
$\rightrightarrows$-**Set**	graph	×	×	$V \rightrightarrows W$	×	×
$\circlearrowright$-**Set**	dyn.sys.	×	×	$V \to V$	×	×
sSet	sset	×	×	chain cpx	?	?
Cohen	?	✓	✓	$(V_p)_{p\in\mathbb{P}} + \alpha$	?	?
Sh(S^1)	sheaf	×	×	(vec.bun.?)	?	?

Gabriel's theorem

Thm(Gabriel's theorem)

箙 Q が有限表現型 (f.r.t.) なことと，Q が Dynkin 図形であることは同値である．

Informal Def(有限表現型 topos)

Grothendieck topos $\mathcal{E}$ が有限表現型であるとは，$\mathcal{E}$ 内の直既約 $\mathbb{C}$ 線型空間が同型を除いて有限個であることを言う．

本節のメッセージ

この Section で伝えること:

- 私は最近 Topos 内の線型代数に興味を持っている.
- Topos 内の線型代数は，外から見れば圏 (⊃ 群, 箙) の表現 (やベクトル束) などになっている.
- 原理的には各種表現論の諸所の差異は，構成的数学をベースにした逆数学と関連するはず.
- 夢の一つは，Gabriel の定理を構成的逆数学の観点から再解釈したい.

話せなかったこと

今後の課題

- 構成的数学に慣れる
  - 有限性や体の定義
  - $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ の振る舞い
- 各種の具体例に慣れる
  - Profinite 群，箙，圏の表現
  - 局所環付き空間
- どこまで topos 内でやるか
  - 有限性 (有限生成，同型類の有限性)
  - 係数環や表現の圏

Topos について

- 空間のなす圏 (=Gros topos) として
- Theory として
- Logos (=categorified (semi)ring) として
- 私の過去の研究