

[1] algebra & coalgebra of endofunctor

(自己関手 $\mathcal{A}$ の代数, 余代数とは何か?)

[2] initial algebra, terminal coalgebra & fixed point

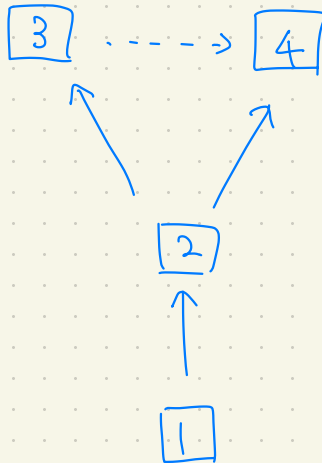
(initial alg, terminal coalg に注目! + 不動点の存在)

[3] initial algebra の再帰的構性

(Adamek の thm. 計算子と再帰的構性)

[4] The universality of the unit interval

([3] 以外の対象で計算子も, $[0,1]$ の普遍性)



□ algebra & coalgebra of endofunctor

(Tuesday 4/24)

今日の x への題材。

Def (co)algebra of endofunctor

$\mathcal{C}$: category, $T: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$: functor

つまり,

(i) T -algebra とは $\mathcal{C}$ の object C と $\mathcal{C}$ の射

$$T_C \xrightarrow{a} C \text{ の組 } (C, T_C \xrightarrow{a} C)$$

(ii) T -coalgebra とは. $\exists$ の dual. $(C \xrightarrow{b} T_C)$

の $\exists$ である。

$$\begin{array}{ccc} T_C & \xrightarrow{f} & T_D \\ \downarrow a & \circlearrowleft & \downarrow b \\ C & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

自然な射 $\exists$ である $\times$ である。

図 $T\text{-Alg}$, $T\text{-coAlg}$ の定義。

e.g.) $\text{id}_E: E \longrightarrow E$ a algebra $\neq$ coalgebra $\neq$,

$$E^{\bullet \otimes} := E^{\mathbb{N}} \quad (\text{離散力学系})$$

—#

e.g.) algebra $f(x) \in \mathbb{N}[x]$ 12212,

$f(x): \text{Set} \longrightarrow \text{Set}$ a algebra is.

Set with $\bigcirc$ -ary 演算

e.g of e.g) x --- 上の例。離散力学系。

$1+x$ --- 始点つき離散力学系

x^2 --- Set with 二項演算。

e.g.) coalgebra

(3個要素の)集合 $A = \{a, b, c\}$

$$2 \times X^A : \text{Set} \longrightarrow \text{Set}$$

の coalgebra は $X \xrightarrow{f} 2 \times X^A$

$\downarrow$

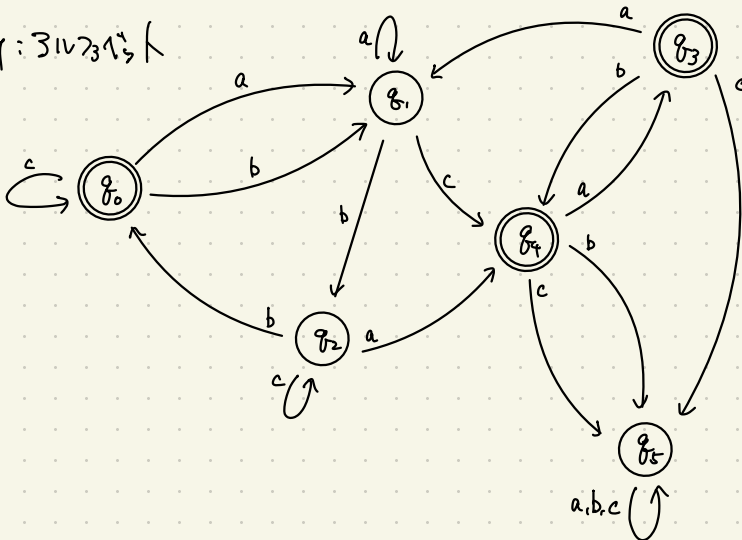
$$\left(\underline{S \subseteq X}, \{X \xrightarrow{f_a} X\}_{a \in A} \right)$$

accept
state

つまり, Deterministic Automaton

- future ε は限られる
 - 始点 も 定まる
- $\leadsto$ 有限状態オートマトン

$\{a, b, c\}$: 3個要素



e.g.) monoidal category $(\mathcal{C}, \otimes, I, \rho, \lambda, \alpha)$

$$\text{is: } \mathcal{C} \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\otimes} \mathcal{C}$$

is endofunctor Aut .

e.g. of e.g.) $\text{Vect}_K \xrightarrow{- \otimes -} \text{Vect}_K$

is: algebra is K -~~field~~

coalgebra is $V \otimes V \longrightarrow V$ as $\mathcal{C}$.

(+ $V \longrightarrow K$ is usual $\mathcal{C}$.)

Vect_K a comonoid (coalgebra, Aut)
is $\mathcal{C}$

(Top $\in \mathbb{H}$ $\mathcal{C}$.)

(is $\neq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}$)

Remark (代数代数关系)

$\mathcal{C}$: category $\vdash$ a monad (T, η, μ)

a algebra on $\mathcal{C}^T$ is

$$\mathcal{C}^T \hookrightarrow T\text{-Alg}$$

$\hookrightarrow$ fully faithful (isomorphism)

$$\begin{array}{c} \text{Grp} \begin{cases} \nearrow (x^2)\text{-Alg} \\ \longrightarrow (1+x^2)\text{-Alg} \\ \searrow (1+x+x^2)\text{-Alg} \end{cases} \longleftrightarrow \text{Monoid} \end{array}$$

$$\text{Ring} \longrightarrow (2+2x^2)\text{-Alg}$$

$\leadsto T\text{-Alg} \longrightarrow \mathcal{C}$ as monadic adjunction,

algebraic free monad $\hookrightarrow \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{B} \dots$

2 initial algebra, terminal coalgebra & fixed point

$$T: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \quad \text{is an endofunctor.}$$

$$T\text{-Alg} \quad \text{is the category of } T\text{-algebras.}$$

(monads are functors with a multiplication arrow)

hence ($T\text{-Alg}$ is limit, $T\text{-coAlg}$ is colimit)

$T\text{-Alg} \longrightarrow \mathcal{C}$: strictly creates all limits that $\mathcal{C}$ has

$T\text{-coAlg} \longrightarrow \mathcal{C}$: strictly creates all colimits that $\mathcal{C}$ has.

$\leadsto T\text{-Alg}$ is initial,

$T\text{-coAlg}$ is terminal

is the unique object in $\mathcal{C}$ with a T -algebra structure

e.g.) $1 + x : \text{Set} \longrightarrow \text{Set} \quad \&3,$

initial algebra は

$$\begin{array}{ccc} \{*\} \cup \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ \cup & & \cup \\ * & \longmapsto & 0 \end{array}$$

$$n \longmapsto n+1$$

12 頁

(Rank inductive type (未知)
 $\Leftrightarrow$ initial T-alg の 射 を 伸ばす には,
 T-alg 構造 を 入れれば よい)

e.g.) $1 + x^2 : \text{Set} \longrightarrow \text{Set} \quad \&5,$

initial algebra は 根つき = 分木の集合 Tree
 3.10.2

$$1 + \text{Tree}^2 \longrightarrow \text{Tree}$$

$$* \longmapsto \bullet$$

$$(\pi_1) \quad (\pi_2) \longmapsto \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \pi_1 \quad \pi_2 \end{array}$$

(1. 初元
 initial algebra
 "自明な"
 "最小な")

e.g.) $2 \times X^A : \text{Set} \longrightarrow \text{Set}$ の terminal coalgebra は?

$A^* := \coprod_{n \geq 0} A^n : A$ の有限文字列の集合,

$P(A^*) : A \ni z \cup z \mapsto \{z \cup z\}$ 言語の集合

Ex. $\text{Automata} := (2 \times X^A)$ coalg の terminal は,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet S \in P(A^*) \text{ について } S : \text{acceptable} \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{空文字列} \in S \\ \bullet \begin{array}{ccc} P(A^*) & \xrightarrow{a} & P(A^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longmapsto & \{ \tau \in A^* \mid (a, \tau) \in S \} \end{array} \end{array} \right.$$

2" 5h3h3. terminal の形は,

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & P(A^*) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$x \longmapsto (x \text{ を始点として受理できる言語})$$

($2 \times X^A$ は言語の受理を導く)

(初期状態
terminal coalgebra
→ "学部の記号代")

2. $n \in \mathbb{N}$ is given

① fixed point (2.4.22) ($\leadsto T$)

② 0.03 (terminal coalgebra 8.5.103) $T \cong " \omega A "$ if A is ω -cpo.
($\leadsto$ 8.5.103), [3] Adámek)

Prop (initial algebra, terminal coalgebra $\leadsto$ fixed point)

$T: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ is a functor,

initial T -alg

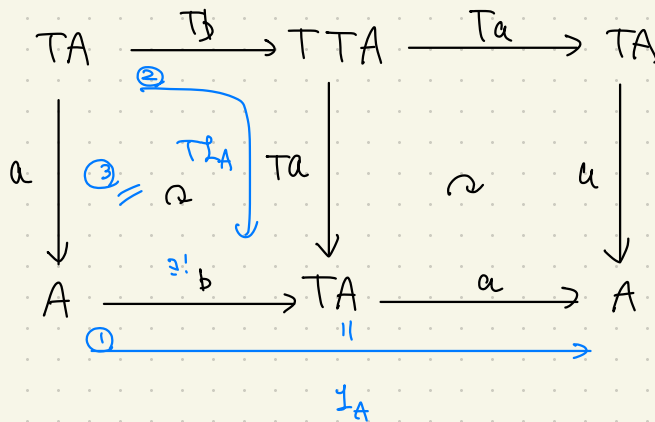
$TA \xrightarrow{a} A$ a A is T iso,

terminal T -alg

$A \xrightarrow{a} TA$ a A is T iso.

(proof)

initial
(2.4.22)



Remark (fixed point of endofunctor)

$$C \begin{array}{c} \xleftarrow{G} \\ \perp \\ \xrightarrow{F} \end{array} D$$

#3. fixed point is
equiv of $\text{cat } D^{\text{op}} \subset D$.

? (deategorification)

$1 + \text{Tree}^2 = \text{Tree}$ is decategory $\subset \mathbb{Z}$ 成立する.

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$ なら $1 + f^2 = f$ は 二分木の母関数に定まる
 $\Leftrightarrow \text{FinSet}^{\text{FinSet}}$ の "point" ?

Remark (制限)

形式 D^{op} 限定する. fixed point $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ なら endofunctor

$\text{Set} \xrightarrow{\text{PC-1}} \text{Set}$ is initial algebra $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ なら

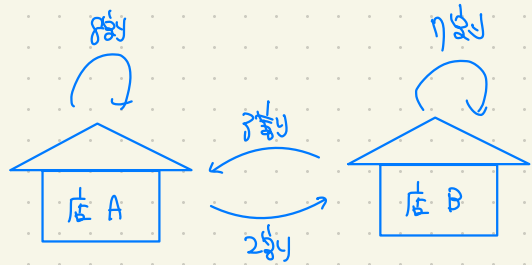
3 initial algebra の再帰的構成

(超 informal にて. fixed point は " $T^\infty X$ " と可ばよいよね.)
最小で $T^0 \emptyset$ と可ばよいよね

Remark (不動点の構成)

①

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$



$A \in \text{何回} \in \text{OTI}$ と fixed point に収束して存在.

②

$f: X \longrightarrow X$: contd かつ $x_0 \in X$ として

$x_0, f(x_0), ff(x_0), \dots \longrightarrow x_\infty$ (収束)
 $f(x_\infty) = x_\infty$

③ 類似 a 構造。

$$f: X \longrightarrow X: \text{aut}$$

$$\bullet x \in X \text{ 選 } \downarrow$$

$$\bullet x, f(x), f^2(x), \dots$$

無限列。

$$\bullet f \text{ として } x, f(x), f^2(x), \dots$$

n 列 $\in \mathbb{R}$ ($\Leftarrow f: \text{aut}$)

$$\bullet \text{ case, } \lim f^n(x) \text{ is } f \text{ on}$$

fixed point

(Abundant as well)

$$T: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}: \text{endofunctor}$$

$\hookrightarrow \mathcal{C} \text{ is initial T-algebra as}$

$$\bullet \text{ initial object } 0 \in \text{ob } \mathcal{C}$$

$\mathcal{C} \in \mathcal{C}$.

$$\bullet 0 \xrightarrow{!} T0 \xrightarrow{T!} T^2 0 \xrightarrow{T^2!} \dots$$

n column $\in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C} \in \mathcal{C}$.

$$\bullet T \text{ as } 0 \xrightarrow{!} T0 \xrightarrow{T!} T^2 0 \xrightarrow{T^2!} \dots$$

n column $\in \mathbb{R} \Rightarrow (\Leftarrow T: \text{coaut})$

$$\bullet \text{ case, } \lim_{n \in \omega} T^n 0 \text{ is}$$

T initial algebra ($\mathcal{C} \hookrightarrow \text{fixed point}$)

Thm (Adámek)

$T: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$: endofunctor,

$\mathcal{C}$ has initial object $0 \in \mathcal{C}$.

$$0 \xrightarrow{!} T0 \xrightarrow{T!} T^2 0 \xrightarrow{T^2!} T^3 0 \longrightarrow \dots \text{colim}_{n \in \omega} T^n 0 \cong T^\infty 0$$

if colimit exists $\hookrightarrow T$ preserves it,

$$\begin{array}{ccccccc} T0 & \xrightarrow{T!} & T^2 0 & \xrightarrow{T^2!} & T^3 0 & \xrightarrow{T^3!} & \dots T(T^\infty 0) \\ \downarrow \scriptstyle{!_{T0}} & \sim & \downarrow \scriptstyle{!_{T^2 0}} & \sim & \downarrow \scriptstyle{!_{T^3 0}} & \sim & \downarrow \scriptstyle{!_{T(T^\infty 0)}} \\ 0 & \xrightarrow{!} & T0 & \xrightarrow{T!} & T^2 0 & \xrightarrow{T^2!} & T^3 0 \longrightarrow \dots T^\infty 0 \end{array}$$

$$\text{if } \alpha: T(T^\infty 0) \longrightarrow T^\infty 0$$

is initial T -alg (if dual $\neq$)

今 a diagram

예 17. 5.12 T-adj $TX \xrightarrow{f} X$ $\cong$ 14 장 203.

ohne variabel

$(T_n \xrightarrow{2n} X)_{n \in \omega}$ is a ω -NBS $\frac{1}{2} \neq 0 = 2 \cdot 0$ is a $\mathbb{Q}$.

(diagram)

e.g.) 多項式は $\text{set } \mathbb{N}$ 条件で可。

$1+x$: $\{ \} \rightarrow \{0\} \rightarrow \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\} \rightarrow \dots$ ^{abun} $\mathbb{N}$

$1+x^2$: $\{ \} \xrightarrow{\text{深さ} \leq 1} \{ \bullet \} \xrightarrow{\text{深さ} \leq 0} \{ \bullet, \bullet \} \xrightarrow{\text{深さ} \leq 1} \{ \bullet, \bullet, \bullet \} \rightarrow$
 $\rightarrow \{ \bullet, \bullet, \bullet, \bullet \} \xrightarrow{\text{深さ} \leq 2} \{ \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet \} \rightarrow \dots$

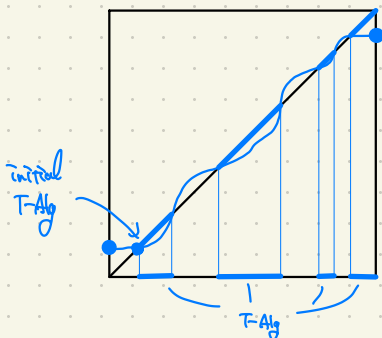
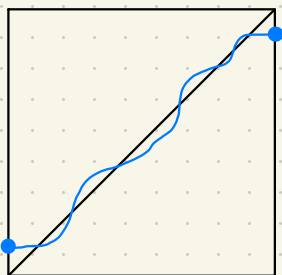
$x \mapsto 1+x$ * $x \mapsto 1+x^2$. And $\rho(x) = \infty$ is the "Categoricity" 条件 意味が異なる ~

e.g.) Toy Example.

$T = [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$: 連続 & 順序保存写像

と可。

T -Alg は $Tx \leq x$ かつ $x \in [0, 1]$ かつ poset.



$0 \leq T^0 \leq T^1 \leq T^2 \leq \dots$ as sup of "最小 fixed point".

e.g.) dual.

$$2 \times X^A: \text{Set} \longrightarrow \text{Set} \quad \text{r.t.}$$

$$\begin{cases} L_0 := I \\ L_{n+1} := 2 \times L_n^A \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$\in \mathbb{C}^2$ 実数列 (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})
の列 n A \{L_n \text{ の要素} \}

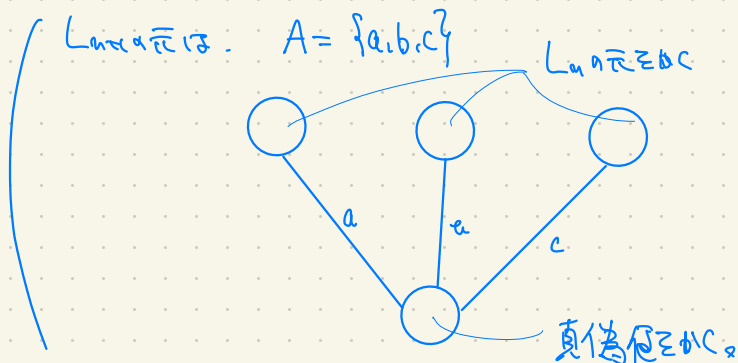
$$L_\infty := \lim_{n \in \omega} L_n \quad \dots \longrightarrow L_3 \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0$$

を

$$L_n \text{ は } \underbrace{P \left(\prod_{i=0}^{n-1} A^i \right)}_{2^{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}} \pi}$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 2 \times x_n^a \end{cases}$$

に



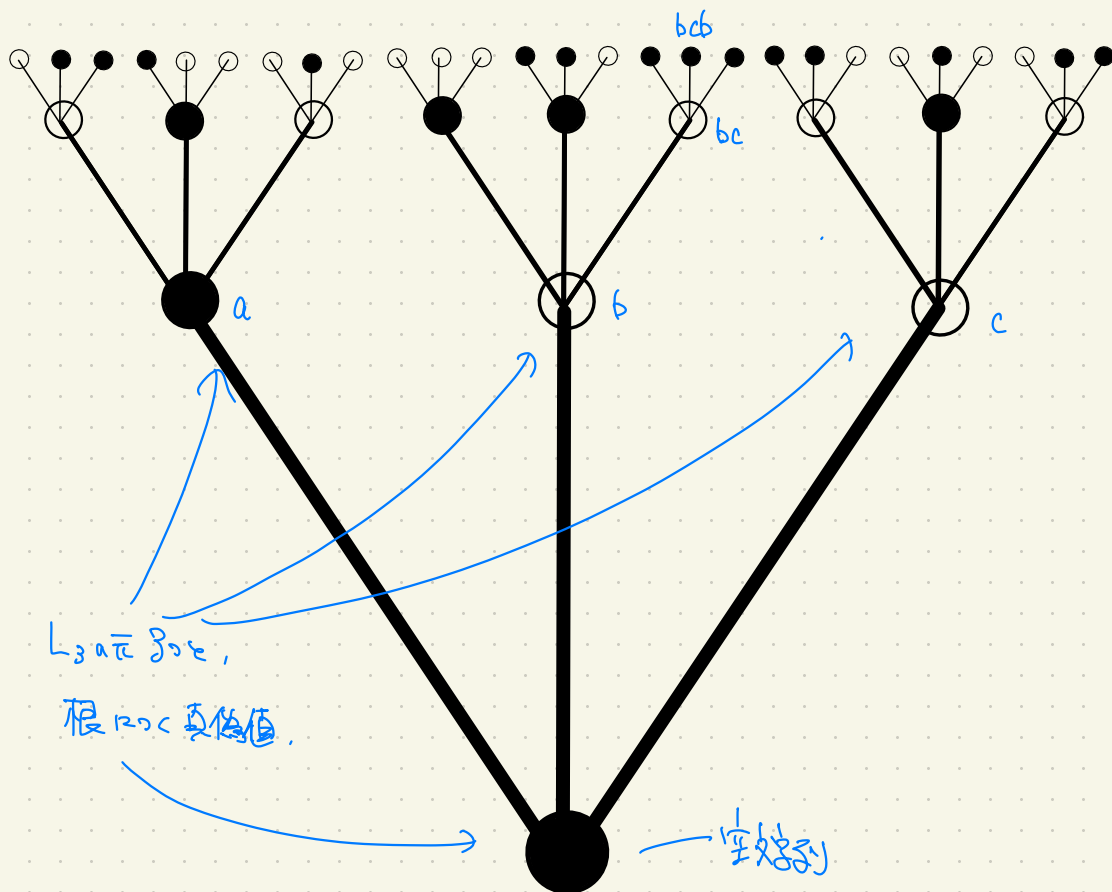
informal 説明

L_n の元は

(A) には $n-1$ 段階 分岐した n node (高さ $n-1$ 文字の文字列に対応) には 真偽値 対応する と 考える.

例として,

$A = \{a, b, c\}$ かつ L_4 の元は



e.g.) 後は $2 \subset 3$ 図 $2 \subset 3$, $Top_{*,*}$ $\ni$ $\frac{1}{2} \ni 3$.

(i) object is top.sp $X \in X$ $2 \ni a, b$ $(x_0, x_1) \in X^2$
 $a \in A(x_1, (x_0, x_1))$

morphism is anti- $2 \ni a, b \ni$ 保 $\neq 0$.

(ii) $* \sqcup * / Top$

(iii) $Top \xrightarrow{U} Set \xrightarrow{\Delta_{Set}} Set^2 \xrightarrow{x} Set$

a Category of elements.

$\rightarrow$ left column

(iii) Bicategory $Cospan(Top)$ is $2 \ni 1 \ni 3$ $\times$ a End

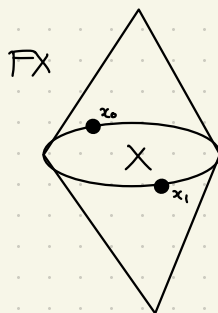
$\rightarrow$ monoidal structure
 $\rightarrow$ enrichment

$$F: \text{Top}_{*,*} \longrightarrow \text{Top}_{**}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$X \longmapsto X \times [-1, 1] \quad \Sigma, \quad X \times \{-1\} \cong \Sigma^+ \subset X \times \{-1\} \cong \Sigma^- \subset X \times \{1\}$$

(両側を "cone" する)



≡ 上の図の構成から図 1,

$$S^0 \hookrightarrow S^1 \hookrightarrow S^2 \hookrightarrow \dots \quad \text{def}_{\text{new}} S^n =: S^\infty$$

initial b" initial (2つ)

(注) Top : not CCC.
 - 一般には 剰余 と product は 可換でない
 例: $[-1, 1]$ は 点集として

(-1, 1) の closure は Disc (2, 2)

$$\left(\begin{array}{l} \text{Exercise } \text{Top} \xrightarrow{X[-1, 1]} \text{Top} \quad \text{2" } * \rightarrow I \rightarrow I^2 \rightarrow \dots \text{" } I^\infty \\ \text{Top} \xrightarrow{X[-1, 1]} \text{Top} \quad \text{2" } \text{terminal cofibration } \in \text{Top} \end{array} \right)$$

< 3

I^ω terminal cofibration ∈ Top?

3 universal property of mit interval.

Adamek $2''$ 조항이 $\notin a$. Top $2''$ 의 Coalgebra $\exists$.

[illegible]

unit interval $\rightarrow \frac{1}{H} \approx$ Center space $\approx \frac{1}{3}$.

$\text{Top} \xrightarrow{-11-} \text{Top} \quad \left(\text{Top} \in \text{coproduct} \circ \text{coCartesian} \text{ 不满足} \right)$

a terminal coalgebra 何?

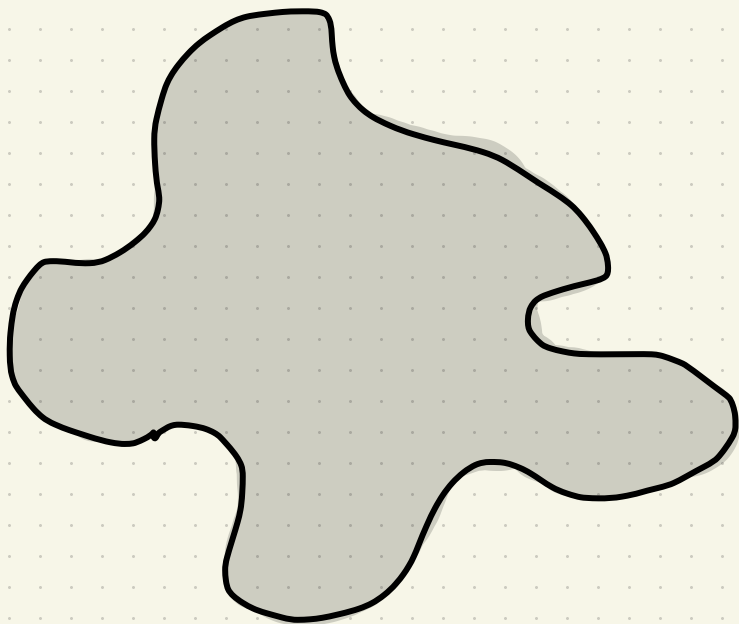
$$\text{Adamek} \quad \dots \quad \{*, * \}_x \quad - \quad \text{Top} \quad \longrightarrow \quad \text{Top}$$

$$\text{SII} \quad \text{--- II ---} \quad \text{17. lim} \geq \text{16} > 63.$$
$$2^N \rightarrow \dots \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

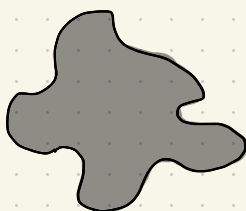
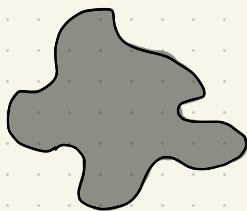
•

Cut space $\{e, f\}$

X



TX



T^2X



T^3X



= h^2 不動点...

Cantor Set 連続 $1/2$ 以下

Prop (Cantor space の 普遍性)

$\text{Top} \xrightarrow{- \sqcup -} \text{Top}$ の terminal coalgebra は

$$\text{Cantor space} \varepsilon \quad 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\delta} 2^{\mathbb{N}} \sqcup 2^{\mathbb{N}}$$

$$a_0 a_1 a_2 \dots \mapsto \begin{cases} \text{L} \circ a_1 a_2 \dots & (a_0 = 0) \\ \text{R} \circ a_1 a_2 \dots & (a_0 = 1) \end{cases}$$

証明。

(proof 1) Adámek の 証明。

(proof 2) $\mathbb{S} \in \mathbf{Set}$ にと, $A = 1$ $a \in \mathbb{S}$ の Automaton $\forall a \in \mathbb{S}$

$$X \xrightarrow{a} X \sqcup X \quad : \text{coalgebra ではない},$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & X \sqcup X \\ f \downarrow & \sim & \downarrow f \sqcup f \\ 2^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\delta} & 2^{\mathbb{N}} \sqcup 2^{\mathbb{N}} \end{array}$$

in Set

この function は
 $2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}} \sqcup 2^{\mathbb{N}}$ ではない。

f の連続性は,

$$X \xrightarrow{a} X \amalg X \xrightarrow{a \amalg a} X \amalg X \amalg X \amalg X \xrightarrow{a \amalg a \amalg a} \dots$$

の連続性が示される。

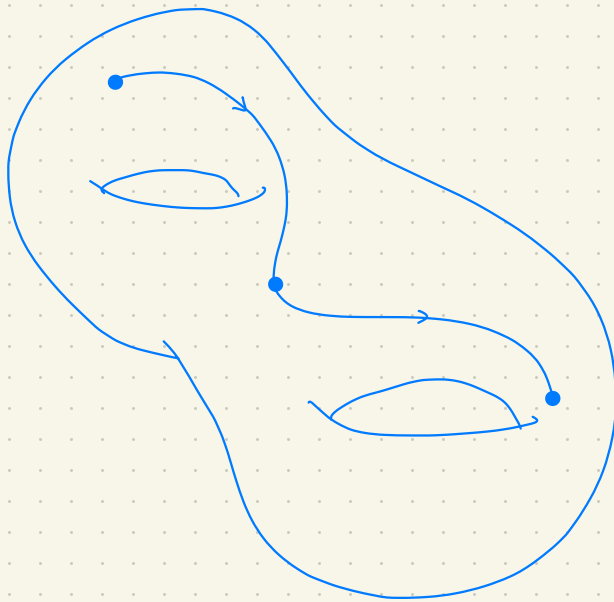
(2^N の基底は $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in A^k$ である。
最初 n 文字 $a_0, \dots, a_{k-1}$ は 2^N に n 個入る。

)

(n 個入る 2^N は 2^N である)。

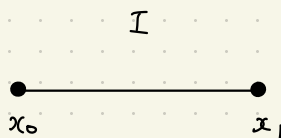
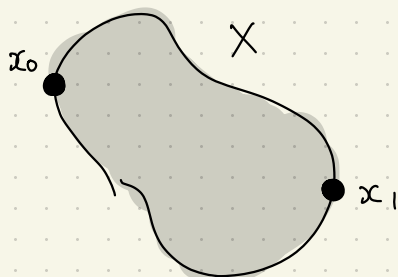
with interval is, path $\exists$ $a \in \mathbb{Z}$ 普通的 $\mathbb{Z}$

1117211

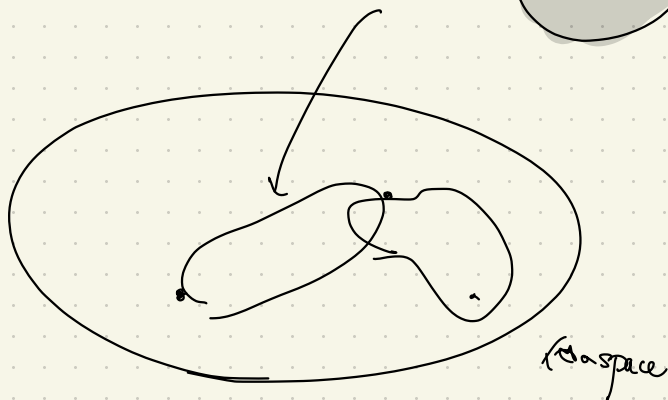
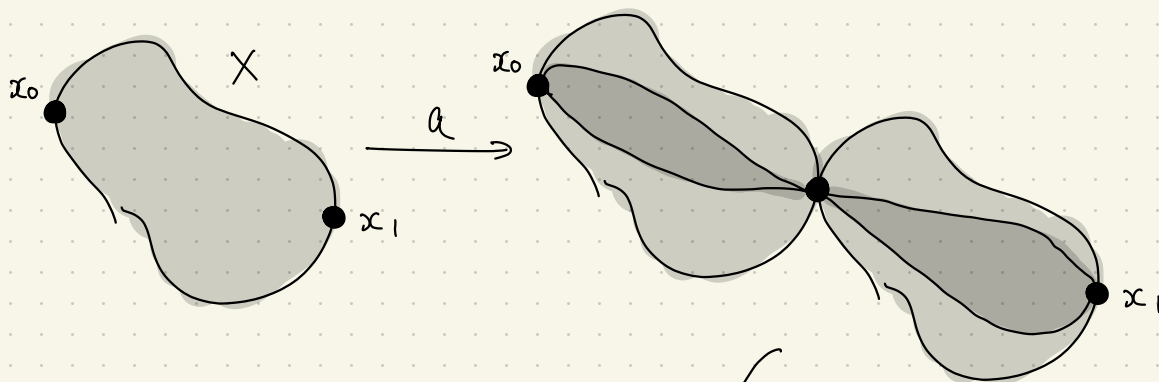


path Σ 連続的. 空間 Σ . 始点と終点が必要

$$(X, (x_0, x_1) \in X \times X).$$

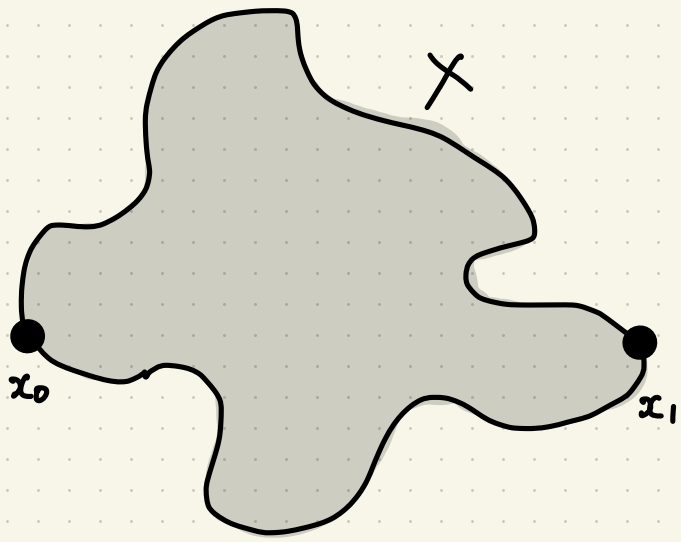


2312. path Σ 連続的. 空間 $\Sigma \geq 2$ の場合が必要.

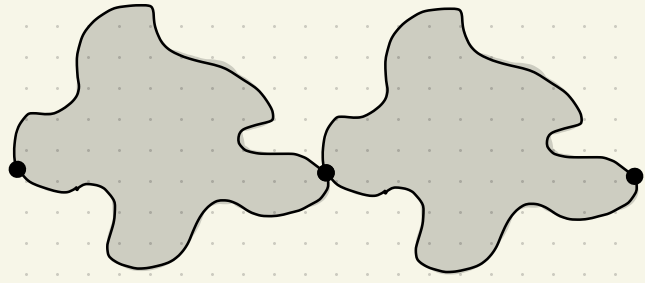


(coalgebra!)

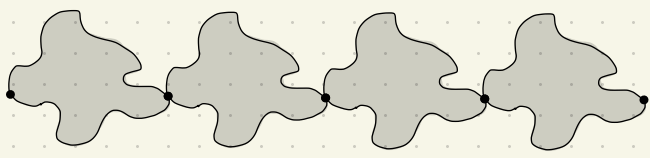
X



$T X$



$T^2 X$



$T^3 X$



$T^4 X$



$\downarrow$

more internal $\approx$ 連貫

$(X, (x_0, x_1))$ に対し, x_0, x_1 は 異なる closed point であり, Bipoïnted topological space である。

異なる点 x_0, x_1 が必要。

このとき...
(true, false = indistinguishable topology)
= 区別がつかない

$$\text{BipoïntedTop} \hookrightarrow \text{Top}_{**} \quad \text{etc.}$$

Bipoïnted topological space は full subcategory

である。

Remark (BipoïntedTop の terminal coalgebra は, Adámek の主張 (7.1))

$$\text{BipoïntedTop} \hookrightarrow \text{Top}_{**} \longrightarrow \text{Top} \xrightarrow{U} \text{Set}$$

この忘却は表現可能 (by $\begin{matrix} *_1 & & *_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{*_1, p, *_2\} \end{matrix}$) であり, Carti.

と $\langle \text{terminal} \rangle$ を保つ。

BipoïntedTop の元は $\downarrow$ が $\in$ 2 つある。terminal を保つ。

$\leadsto$ Adámek の主張 (7.1)

Thm (The universal property of the unit interval)

$I = [0, 1]$ と 「実数 2つの閉点 s, t を top.sp とし、その結合に関して普遍的」

$$I \xrightarrow{\delta} I \vee I$$

$$\psi \quad t \longmapsto \begin{cases} \text{左の } 2t & (t \leq \frac{1}{2}) \\ \text{右の } 2t - 1 & (\frac{1}{2} \leq t) \end{cases}$$

$$\text{Bipointed Top} \xrightarrow{\vee} \text{Bipointed Top}$$

の terminal coalgebra である。

(proof) coalgebra $X \xrightarrow{a} X \vee X$ を与えらる。

(uniqueness) coalgebra morphism $f: X \longrightarrow I$ は

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{a} & X \vee X & \xrightarrow{ava} & X \vee X \vee X \vee X & \xrightarrow{avavava} & \dots \\ \downarrow f & \simeq & \downarrow f \vee f & \simeq & \downarrow f \vee f \vee f & \simeq & \\ I & \xrightarrow{\delta} & I \vee I & \xrightarrow{\delta \vee \delta} & I \vee I \vee I \vee I & \xrightarrow{\delta \vee \delta \vee \delta \vee \delta} & \dots \end{array}$$

である。

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{a} & X \cup X & \xrightarrow{a \vee a} & X \cup X \cup X \cup X & \xrightarrow{a \vee a \vee a \vee a} & \dots \\
 \downarrow f & & \downarrow f \vee f & & \downarrow f \vee f \vee f & & \\
 I & \xrightarrow{\delta} & I \cup I & \xrightarrow{\delta \vee \delta} & I \cup I \cup I \cup I & \xrightarrow{\delta \vee \delta \vee \delta \vee \delta} & \dots
 \end{array}$$

$x \in X$ の f での行き先は、 $\delta \wedge k \leq \infty$ だと

$\frac{1}{2^k}$ の精度がわかる。

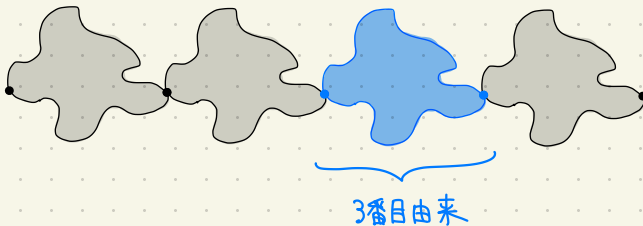
(存在)

I^2 suggest しているのは、 δ は k 回行って、 i 番目以来の X に

入っているとき $\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right]$ に入っているものが unique かつ
 i 回 f function f を繰り返す

左に行くときは 0, 右に行くときは 1 (入っているところは 0 と 1 の間)

それと 0, 1 の無限列で 2 進数になる。



$$f: X \longrightarrow I : \text{cont.}$$

$x \in X \ni$ 任意 $(2 \in \mathbb{Z})$, $f(x) \in \mathbb{Q}$ open $U \subseteq I \ni$ 任意 $(2 \in \mathbb{Z})$.

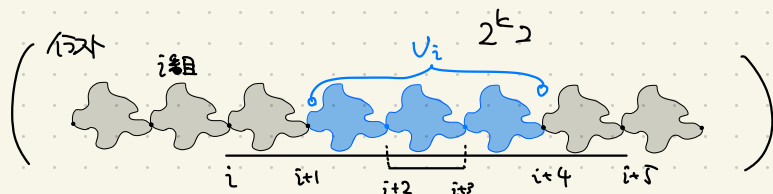
$$f(x) \in \left[\frac{i+2}{2^k}, \frac{i+3}{2^k} \right] \cap I \subseteq \left(\frac{i}{2^k}, \frac{i+5}{2^k} \right) \cap I \subseteq U$$

$\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq i+2 < 2^k \quad \exists \in \mathbb{Z}$.

$$\alpha_k: X \xrightarrow{\overbrace{a_1 \vee \dots \vee a_{2^{k-1}}}^{2^{k-1}} \dots \vee \overbrace{a_1 \vee \dots \vee a_{2^k}}^{2^k}} X \vee \dots \vee X$$

$2^k \supset \text{open}$, $(i+2 \text{ 番目}) - \text{点}$, $\in (i+3 \text{ 番目}) \in (i+4 \text{ 番目}) - \text{点}$.

$$\text{open} \ni U_i \subseteq X \vee \dots \vee X \quad \text{点},$$



U_i is open in $X \vee \dots \vee X$ 点 n^2 ($\because x_0, x_1 \in X$ closed) not a point.

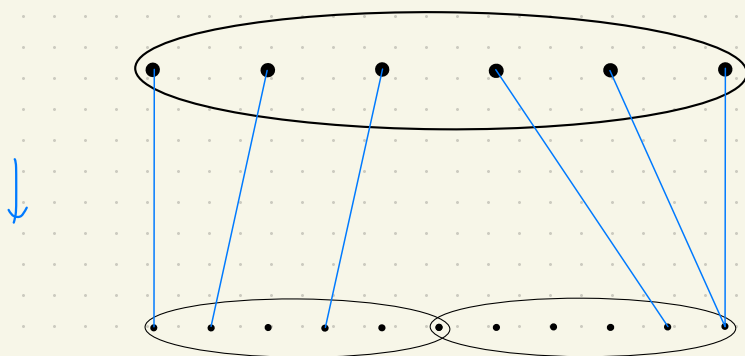
$$\alpha_k^{-1}(U_i) \subseteq X: \text{open}.$$

$$\neg 3, \quad x \in \alpha_k^{-1}(U_i) \subseteq f^{-1}\left(\left[\frac{i+1}{2^k}, \frac{i+4}{2^k}\right]\right) \subseteq f^{-1}\left(\left(\frac{i}{2^k}, \frac{i+5}{2^k}\right)\right)$$

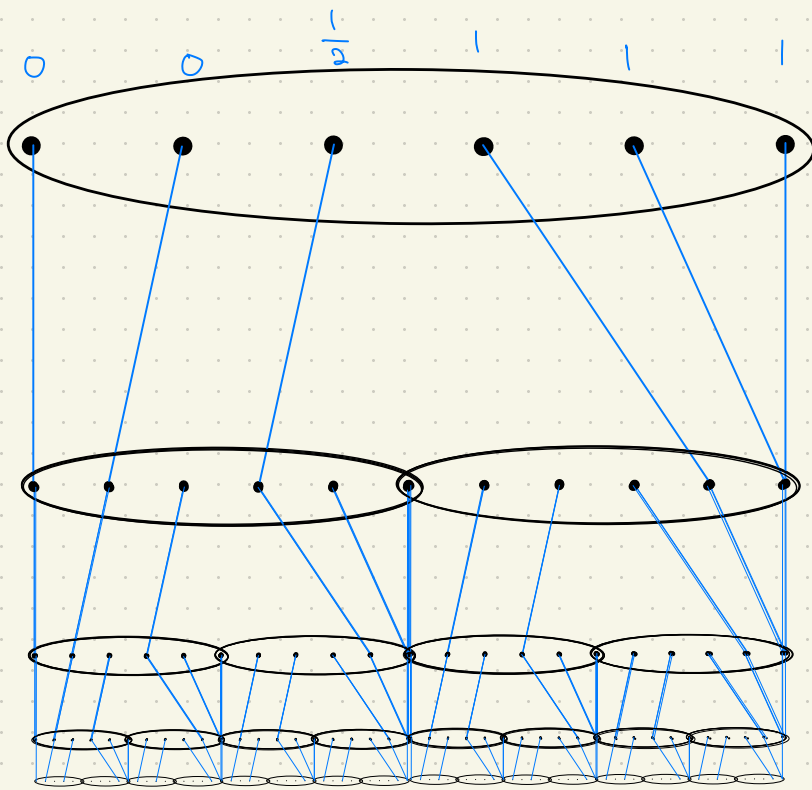
点 x の連続性が成り立つ.

//

おえかき。



43 coadjoint 12,112,



43, 12, 112, 1

参考12172#9

→

algebra of
endomorphism
の 基本

unit interval
- 1023#

Cogebra &
Computer
Science

1172#9

Awodey の Category theory の 10章.

Tom Leinster の A general theory of self-similarity
(J. Pure Appl. Algebra 2011, 216(12): 2011-2012) (2011)

Jon Rutter の The Method of Cogebra
(Automata Theory 2011, 2011-2012)

Rich の Category theory in context
(2011, Epilogue.)