

Hyperquotients of Presheaf Topoi.

5/22 発表用下書き.

§0 導入

§0.1 $\mathbb{N}$ の流れの復習

§0.2 subtopoi of Presheaf Topoi の復習

§0.3 今日の概要.

§1 internal commutative idempotent monoid.

§1.1 internal cim

§1.2 internal filter

§1.3 subobject classifier is the filter classifier

§2 coseive presheaf

§2.1 presheaf の $\mathbb{N}$ の $\mathbb{N}$ の coseive

§2.2 coseive presheaf $\mathbb{Z}$

§2.3 internal cim structure of $\mathbb{Z}$

§2.4 main thm: classification of hyperquotients of presheaf topoi.

§3 $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$.

§0 導入

§0.1 ニニガの流氷の復習

※. Lawvere の unsolved problems の 1 番.

Q: Grothendieck topos $\mathcal{E}$ の quotient は 高々 small 2 否?

を 考 えて いた.

$$\mathcal{E} \xrightleftharpoons[f_*]{f^*} \mathcal{Q} \quad \begin{array}{l} \text{: geometric morphism} \\ \mathcal{Q} \text{ 2-} f^* \text{: fully faithful} \\ \text{than } \mathcal{E} \end{array}$$

講究の最終回は、私は次を示した.

Prop (group action topos の quotient の決定)

群 G による. 以下のデータは - 対 - 1 に対応する

① $\text{Set}^{G^{\text{op}}}$ の quotient (a 同値類)

② G 上の “簡素位相構造”

③ G 上の “正規フィルター”

この命題は、何かより一般的で定理の特殊なケースになっていると期待したい.

($\leadsto$ 前回は、①と②の対応を一般の (群とは限らない) 圏 $\mathcal{C}$ に拡張する可能性について議論した)

今日は, ①と③の対応を一般の圏と1対1対応する!

そのため, 直接は使えないが, 群の正規フィルター の概念を復習しておく.

Recall (群の正規フィルター)

群 G の正規フィルター $\mathcal{F}$ は, G の subgroups の集合 $\text{Sub Grp}(G)$ の subset $\mathcal{F} \subseteq \text{Sub Grp}(G)$ であって, 以下の4つを満足するものという.

- フィルター
- (i) $G \in \mathcal{F}$
 - (ii) $H, H' \in \mathcal{F} \Rightarrow H \cap H' \in \mathcal{F}$
 - (iii) $H \in \mathcal{F}, H' \in \text{Sub Grp}(G), H \subseteq H' \Rightarrow H' \in \mathcal{F}$
- 正規
- (iv) $H \in \mathcal{F}, g \in G, g^{-1}Hg \in \mathcal{F}$

今日分類する hyperquotient にもう一度復習しておく.

Recall (hyperquotient)

topos $\mathcal{E}$ と $\mathcal{E}$ の quotient $\mathcal{E} \xrightleftharpoons[f_*]{f^*} \mathcal{Q}$ による.

$\mathcal{Q}$ が hyperquotient であるとは, $\mathcal{Q}$ が $\mathcal{E}$ の full subcategory として

以下の 同値条件 の1つ (従って両方) を満足するということ.

- $\mathcal{Q}$ は, non-trivial subobject を持つ操作 であること

• Q は: quotient (co-subobject) を作り出す。

※は. Boolean topos には. $\top$ の quotient は hyperquotient である。

$\text{Set}^{G^{\text{op}}}$ は Boolean である。 $\text{Set}^{G^{\text{op}}}$ の quotient に関する定理は。

より一般の $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ は hyperquotient に関する定理も成り立つ。

今日の話をまとめると. $\text{Set}^{G^{\text{op}}}$ の hyperquotient に関する話

の系として. $\text{Set}^{G^{\text{op}}}$ の quotient の命題は 真。

§0.2 subtopoi of Presheaf Topoi の復習

実は. 今日の話は. subtopoi of Presheaf Topoi の話

(SGL の III と V) と双対的に類似している.

その意味で $S \wr T$ である. subtopoi of Presheaf topoi は復習する.

topos $\mathcal{E}$ の subtopos $\mathcal{E}'$. $S \xleftarrow{f^*} \mathcal{E} \xrightarrow{f_*} S$: geometric morphism
 f_* : fully faithful かつ $z \dots$.

Lawvere-Tierney topology

$\mathcal{E}$ の quotient は. $\mathcal{E}$ の Lawvere-Tierney topology

$\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ と対応している. j は Ω の axiom

・ T の保持. ・ 1 の保持. ・ $j \circ j = j$ であること.

Grothendieck topology

前層 topos $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ (2.1.1.1). Ω は sieve の presheaf である.

$\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ の quotient は Grothendieck topology $J \rightarrow \Omega$
 (i.e. sieve の族 + axiom)
 と対応している.

Grothendieck topology は

$$\begin{array}{ccc}
 J & \xrightarrow{!} & I \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{true} \\
 \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega
 \end{array}$$

12.8.2 Lawvere-Tierney topology
~~is the~~ τ on $\mathcal{C}$

§ 0.3 今日の概要.

今日の目標は. hyperconnected quotients of prestack topoi
を (おかしな形で) 決定することである.

それと似たものを知りたい. Prestack を “最小 1^0-4 ” の分解で分解すること.
hyperquotient である.

subject を操作 (“ 1^0-4 ” を操作する)

colimit を操作 (“ 1^0-4 ” を操作する)

の両方を開いている.

$c(-, c)$ の subject
が active になる.

Prestack を構成する “最小 1^0-4 ” を active,

$(c(-, c)$ の co-subject の) を採用する.

そうすると. hyperquotient $\text{Set}^{\text{cop}} \leftarrow \mathbb{Q}$ である. active である

合っているかのみで決定されるだろう. このあたりを考慮

する.

ここに有利な形に表現するために. cmm

(commutative idempotent monoid) を考える.

今Aの表現は. §1 と §2 の 2つに分けられる.

§1 については. - 1つは a topos における internal commutative idempotent monoid (= internal bounded semilattice) (以下, cīm) に関する議論が.

- Lawvere - Tierney topology 12 32 は cīm の τ の τ である
- cīm 12 32 は filter の τ の τ である
- subobject classifier $\Omega \rightarrow \Omega$ は universal の filter である.

これらに関する議論が.

§2 については. Presheaf Topoi の hyperquotients 12 32. n 12 32.

embedding	hyperquotient
Ω : presheaf of sieves	$\mathbb{Z}$: presheaf of cosieves
Grothendieck topology Ω is a subobject classifier	$\mathbb{Z}$ is a subobject classifier
Lawvere - Tierney topology $\Omega \xrightarrow{\tau} \Omega$ idempotent cīm map is a filter	$\mathbb{Z} \xrightarrow{k} \Omega$ cīm map is a filter.

証明. Ω : sieve a presheaf 12.8.2. $\mathcal{Z}$: co-sieve a presheaf

$\in$ 定義可.

$\mathcal{Z}$ is internal ctm a 構造 $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, $\subseteq \mathcal{Z} \subseteq \Omega$,

$\Rightarrow$ a thm $\in$ 示す.

Thm (main theorem)

$\mathcal{C}$: small category 12.11.2. $\text{LX} \text{ on } \mathcal{C}^{\text{op}}$ - 12.11.2 - 12.11.2 可.

(i) $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ a hyperquotient

$\mathcal{C}^{\text{op}}$
 $\hookrightarrow$ embedding)

(ii) $\mathcal{Z}$ a internal filter

$\mathcal{C}^{\text{op}}$
 $\hookrightarrow$ Grothendieck topology)

(iii) internal ctm hom

$$\mathcal{Z} \xrightarrow{k} \Omega$$

$\mathcal{C}^{\text{op}}$
 $\hookrightarrow$ Lawvere-Tierney topology)

$\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ 12.11.2. Given a presheaf $\Omega \in$,

co-sieve a presheaf $\mathcal{Z} \in$ internal ctm str $\mathcal{Z} \neq \emptyset$.

$\mathcal{Z} \subseteq \Omega$.

$\mathcal{Z} \rightarrow \Omega$ an internal ctm homomorphism $\in$.

$\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ a hyperquotient

12.11.2

- 12.11.2 示す!!

§1 internal commutative idempotent monoid.

§1.1 internal cīm

commutative idempotent monoid, 略して cīm という
equational theory を導入した。

(Bounded semilattice を持つものが、
cīm という略が “しむ” と発音しやすいという理由でこの字を選んだ)

Def (cīm)

cīm とは、0項演算 $\top$ と 2項演算 $\wedge$ と 4つの axiom

$$\bullet x \wedge y = y \wedge x \quad) \text{ Commutative}$$

$$\bullet x \wedge x = x \quad) \text{ Idempotent}$$

$$\bullet x \wedge \top = \top \wedge x = x \quad) \text{ Monoid}$$

$$\bullet (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

かき好等式理論 という。

e.g.) $\mathcal{E}$: Topos 12.22. Ω は $\mathcal{E}$ の internal hexing algebra
structure を制限した。cīm に合う。

Lauvere-Tierney topology $\Omega \xrightarrow{j} \Omega$ axiom 17.

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\tau} \Omega & \\ & \searrow \downarrow j & \\ & \Omega & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \xrightarrow{1} & \Omega \\ \downarrow \tau & \searrow \downarrow j & \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{1} & \Omega \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{j} & \Omega \\ & \searrow \downarrow j & \\ & \Omega & \end{array}$$

030 27. 3003 27 (7. 12 is j in a hom
27 27, 27.

Lauvere-Tierney topology = $\Omega \rightarrow \Omega$: idempotent & ctm map
27. Ω is internal Heyting algebra 27 27. 30
operator $(V \rightarrow) \in 17$ is 27 27.
27 27 is 27 27 27 27.

e.g.) 17 27. Set^{op} is 27 presheaf $P: \text{Set}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$

27 internal ctm str is. 27 P_c is a ctm str 27.

$\forall f: c \rightarrow c' \text{ in } \mathcal{C}, P_c \leftarrow P_{c'}: \text{ctm hom}$
27 27 27.

e.g.) G : 27 27. $\text{SubGrp}(G) = H * g := g(Hg)$

27 27 27. $\text{SubGrp}(G) \in \text{ob } \text{Set}^{G^{\text{op}}}$ is.

$\begin{cases} H_1 \wedge H_2 := H_1 \cap H_2 \\ \top := G \end{cases}$ 27 internal ctm 27.

§ 1.2 internal filter

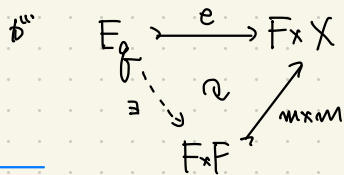
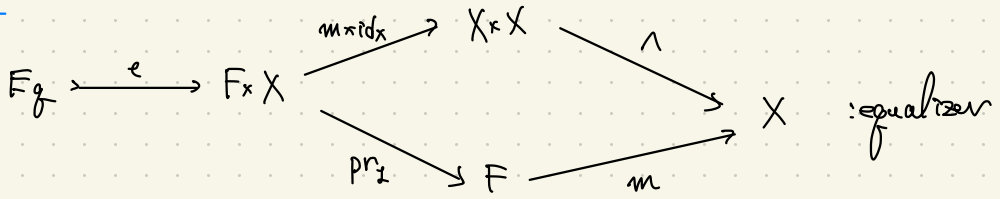
Def (internal filter)

$\mathcal{E} : \text{topos}$. $(X, \wedge, \tau) : \text{internal c\`om} \in \mathcal{E}$.

$\tau \in \text{filter}$. $\wedge \in \text{c\`om}$

$F \xrightarrow{m} X : \text{subobject} \text{ \& "filter" } \text{ } \tau \in \mathcal{E}$.

$F \text{ \& } X \text{ internal c\`om} \text{ } \wedge \text{ } \tau \text{ } \text{subobject} \text{ } \tau \in \mathcal{E}$. $\tau \in \mathcal{E}$



τ factor $\tau \in \mathcal{E}$. (upward closed)

(See-1.1.1.1. $f \in F, x \in X$ $\tau \in \mathcal{E}$. $\frac{f \wedge x = f}{(f \leq x) \wedge \tau}$)

e.g.) $\mathcal{E}^{\text{op}}$ $\tau \in \mathcal{E}$ $P : \mathcal{E}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{E}$ $\tau \in \mathcal{E}$.

P τ internal filter $\tau \in \mathcal{E}$. $F \xrightarrow{\tau} P : \text{subpresheaf}$

$\tau \in \mathcal{E}$. $\forall c \in \text{ob } \mathcal{E}$. $F_c \subseteq P_c : \text{filter} \text{ } \tau \in \mathcal{E}$.

$\tau \in \mathcal{E}$. $\text{Grothendieck topology } J \xrightarrow{\tau} \Omega$ $\tau \in \mathcal{E}$

Set^{op} -internal c.m. Ω の filter $\equiv \text{filter}$.

(Set は filter は $\times$ だが Grothendieck topology には filter がある)

e.g.) G : 群 Set^{op} -internal c.m. $\text{SubGrp}(G)$

の internal filter は $\mathcal{F} \subseteq \text{SubGrp}(G)$: filter

石作用 $H \times g := g^{-1}Hg$ の closure $\mathcal{F}$ である。

e.g.) topos $\mathcal{E}$ の subobject classifier

$1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ は $\mathcal{E}$ -internal filter である。

§ 1.3 subobject classifier is the filter classifier

subobject classifier $1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ is.

internal ctm $\in \mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ filter $\in \text{classify } \mathcal{B}$.

Prop (subobject classifier is the filter classifier)

$\mathcal{E} = \text{locally small topos}$ $1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$: subobject classifier (2.2.12).

$\mathcal{E} \models \wedge X: \mathcal{E}\text{-internal ctm} \in F \xrightarrow{m} X$: subobject $(m \in \mathcal{E})$

(2.2.12).

$F \xrightarrow{m} X$: internal filter $\Leftrightarrow \chi_m = X \longrightarrow \Omega$: ctm hom

$$\left(\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{!} & 1 \\ \downarrow m & \lrcorner & \downarrow \text{true} \\ X & \xrightarrow{\chi_m} & \Omega \end{array} \right)$$

(proof) 略. Yoneda $\in$ 用 (12). $\mathcal{E} = \text{Set}$ のときは 帰着できる.

別に言わなくてもいいけど, $1 \xrightarrow{\text{true}} \Omega$ は internal ctm の

$\text{Ctm}(\mathcal{E})$ の filter $\in \mathcal{C} \supset \mathcal{B}$ functor $\text{Ctm}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\text{op}} \text{Set}$

の universal element $\in \mathcal{E}$ である.

§ 2 cosheaf presheaf

§ 2.1 presheaf の "最小" 11-4, cosheaf

≡ 3.15. Set の hyperconnected quotient 12.11.2 考へる.

Ω は sheaf の presheaf 2.16.2.2 と Σ 2.2.2.2 の 12 頁 11.2.

Σ : cosheaf の presheaf ≡ 定義 17.2.1. 1.1.17 cosheaf は 定義 17.2.1.

Def (cosheaf)

$\mathcal{C}$: small category. 12.11.2. $C \in \text{ob } \mathcal{C}$ 12.11.2.3 cosheaf と 17.2.1.

$\mathcal{C}(-, C)$ の co-subobject. $\rightarrow$ 1.1.17 射 $\mathcal{C}(-, C) \rightarrow E$

の (射を交換する 18.0.2.2) 同型類 $\alpha \in \mathcal{C}(-, C)$.

cosheaf は. § 0.2.2 予備 17.2 presheaf の "最小" 11-4 " 2.16.2.2 と Σ 2.2.2.2.

Def (orbit)

$\mathcal{C}$: small category, $P: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$: presheaf.

$C \in \text{ob } \mathcal{C}$, $x \in P_C$ 12.11.2. x の orbit と 17.2.1.

＊因 $\mathcal{C}$ 対応する射 $\mathcal{C}(-, c) \longrightarrow P$ in $\mathcal{C}^{op}$

epi-mono 分解 $\mathcal{C}(-, c) \xrightarrow{e} \langle x \rangle \xrightarrow{m} P$

epi 部分 $\mathcal{C}(-, c) \xrightarrow{e} \langle x \rangle$ $\nearrow x$ を生成する presheaf.

$c \in \text{ob } \mathcal{C}$ に対して coequalizer $a = e \circ \varepsilon$ いう。

e.g.) G : 群 12.1.2. G の (unique object に対して) coequalizer

は. $X \cap G$: transitive action $e, x \in X$ の組

(X, x) (の同型類) である. x の stabilizer $= H$ である.

これは $H \backslash G$ への右剰余類への G action の同型である.

例2. G の coequalizer は. G の subgroup e に対して 12.1.2.2.

作用 $\gamma \cap G$ $e, y \in \gamma$ 12.1.2.2. $\mathbb{Z}$ の群作用 e への orbit は.

$\mathbb{Z}$ の coequalizer の意味の orbit e 一致である. (coequalizer の意味 $G(-, x)$ の自然な $\mathbb{Z}$ への作用は 12.1.2.2.)

Lemma (coequalizer は 12.1.2.2. である!)

$\mathcal{C}$: small category, $P: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{S}et$: presheaf である.

$Sub(P)$ のうち. $\underbrace{\text{一元生成の}}_{\text{coequalizer}}$ subpresheaf かつ $\mathcal{C}$ の subobject

$\in \text{og } Sub(P)$ $e, c = e$ である. 自然な $\mathcal{C}$ への関手

$$\text{og Sub}(P) \xrightarrow{\quad} \text{Set}^{\text{op}} \quad \text{自然}$$

$$\text{cocone } \{S \longrightarrow P\}_{S \in \text{og Sub}(P)} \quad \text{is cocone exists}$$

必要? $\text{Presheaf} \in$

• orbit $\hookrightarrow$ subject exists. cocone $\wedge$ subject exists.

• 元全体 subpresheaf $\cap$ cocone exists. 復元 exists!

cocone!

hyperquotient は $\wedge$ cocone exists!

必要? is not exists.

必要? is not .

Prop (hyperquotient is cocone exists) $\left(\begin{array}{l} \text{represents full subcategory} \\ \text{exists.} \end{array} \right)$

$\mathcal{C}$: small category. $\text{Set}^{\text{op}} \leftarrow \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$: hyperquotients

exists.

□

$\forall E \in \mathcal{C} \cap$ cocone $\mathcal{C}(-, c) \longrightarrow E$ in Set^{op} exists.
(対象階 is 元全体 $E, \mathcal{C}(-, c)$)

$E \in \text{ob } \mathcal{Q}_1 \iff E \in \text{ob } \mathcal{Q}_2$ $\quad$ $\quad$ exists.

$\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$ (represents full subcategory exists) $\quad$ exists.

(proof)

$P \in \mathbb{Q}_1$ かつ、任意の $x \in P$ に対し、 $\exists$ orbit $\langle x \rangle$ は $\mathbb{Q}_1$ に属している
(hyperquotient $\mathbb{Q}_1$ は subobject である)

仮定より、 $\langle x \rangle \in \mathbb{Q}_1 \Rightarrow \langle x \rangle \in \mathbb{Q}_2$ である。

よって、 $P \in \mathbb{Q}_2$ である (hyperquotient $\mathbb{Q}_2$ は colimit である)

よって、 $\mathbb{Q}_1 \subseteq \mathbb{Q}_2$ である。逆も同様である。

Remark (density theorem)

hom functor $e(-, c) \ni \text{point } c$ に対して、同様に分解

と合体をする定理 c に対して、density theorem がある。

つまり、density theorem というのは cocore component

$e(-, c) \longrightarrow P$ は必ず monic である。subobject として

扱ふ。つまり今の文脈では c である。cocore は、

"point" $(e(-, c))$ の逆像 $\pi^*(e(-, c) \longrightarrow E)$ である

に c だけから、"folded point" の方が c である。今の文脈では

に c だけから c である。

§2.2 coset presheaf $\mathcal{Z}$

As subsection §2.1 2, Set^{cop} の hyperquotient $\mathcal{Q}$ は.

$\mathcal{Q}$ は λ, τ, ι coset の族 α , τ は決定子 ι である.
 τ は, ι による coset の族の hyperquotient かつ $\tau < \iota$ のことを
 考へよう.

coset の族 ι は “自然” かつ α は何れも考へる τ である,
 かつ coset の全体 ι は可構造を知り.

Def (coset presheaf $\mathcal{Z}$)

$\mathcal{C}$: small category $\iota: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ coset presheaf

$\mathcal{Z}: \text{Set}^{\text{cop}} \longrightarrow \text{Set}$ は.

$\mathcal{Z}(c) := c$ における coset 全体の集合 $\iota(c)$, $\iota(c)$ は.

$c \xrightarrow{f} c' \in \mathcal{C}(-, c') \xrightarrow{\alpha} E$: coset ι は $\iota(c)$

$$\mathcal{Z}(f)(\alpha) \in \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(-, c) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{C}(-, c') \\ & & \downarrow \alpha \\ & & E \end{array}$$

an epi-mono 分解

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(-, c) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{C}(-, c') \\
 \downarrow \mathbb{Z}(f)(\alpha) & \simeq & \downarrow \alpha \\
 E' & \xrightarrow{\quad} & E
 \end{array}$$

α ep 部分 $\mathcal{C} \subset \mathbb{Z}$ 定義.

$\Rightarrow$ は. 実際 presheaf 1243.

coarse $\in$ presheaf $\in$ 23 35 $\mathcal{C} \subset \mathbb{Z}$ は. $\Rightarrow$ 自然 $\neq \alpha$ だ33.

例: $\mathcal{C}$ は. $\Rightarrow$ 成立する.

Lemma (orbit naturality)

$\mathcal{C}$: small category. $P: \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set}$: presheaf 1242.

$$\begin{array}{ccc}
 P_c & \xrightarrow{\text{orb}_{P_c}} & \mathbb{Z}(c) \\
 \cup & & \cup \\
 x & \longmapsto & \underbrace{\langle x \rangle}_{\substack{\uparrow \\ x \text{ orbit}}}
 \end{array}
 \quad \text{if natural transformation } P \xrightarrow{\text{orb}_P} \mathbb{Z}$$

$\in \mathbb{Z}$ 定義.

(proof) $\langle x * f \rangle = \langle x \rangle * f$ $\Rightarrow$ 示せばいい. $\Rightarrow$ は $\mathcal{C} \subset \mathbb{Z}$ は.

e.g.) G : 群 1242. coarse $\in$ G の subgroup は 1242-1242.

すの下の π . その対応により, Σ は $\text{Sub Grp}(G)$ の G

(右乗作用) と同型である.

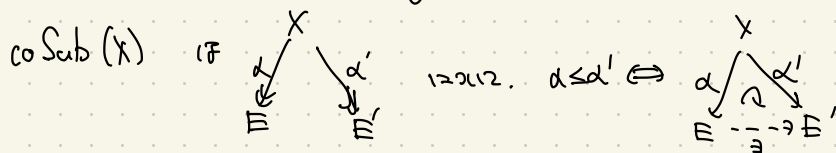
§2.3 internal cīm structure of $\mathcal{Z}$

前の subsection §2.2 同様. coeive 全体 は 自然数 方法で

presheaf $\mathcal{Z}$ に 対応して $\mathcal{Z}$ である. 今 subsection 同様 $\mathcal{Z}$ は

Set^{cop}-internal cīm に 対応して 存在する.

まず, 一般に. (co-well powered) $\mathcal{Z}$ である object X について.



で power に 対応して 完全性 がある. $\mathcal{Z}$ は complete であるから

coSub(X) は complete (attire 同様). $\mathcal{Z}$ は cīm structure である.

このように, Set^{cop} において coSub($c(-, c)$) = $\mathcal{Z}(c)$ は 自然に

cīm structure である. 問題は, $\mathcal{Z}$ が Set^{cop}-internal であること.

つまり 任意の $f: c \rightarrow c'$ について

$\mathcal{Z}(c) \xleftarrow{\mathcal{Z}(f)} \mathcal{Z}(c')$ は cīm hom に 対応して 存在する.

これを check する. 手間は $\mathcal{Z}(c)$ の 1 方向の

計算 である

Lemma ($\wedge: \mathcal{E}(c) \times \mathcal{E}(c) \longrightarrow \mathcal{E}(c)$ の計算方法)

$\mathcal{C}$: small category. $\mathcal{C}(-, c) \xrightarrow{\alpha_1, \alpha_2} E_1, E_2$: cosieves 12.11.2.

$\mathcal{C}(-, c) \xrightarrow{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle} E_1 \times E_2$ a epi-mono 分解 a epi 部分が

$E_1 \wedge E_2 \in \mathcal{E}(c)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(-, c) & \xrightarrow{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle} & E_1 \times E_2 \\ & \searrow \alpha_1, \alpha_2 & \nearrow \alpha \\ & E_1 \wedge E_2 & \end{array}$$

(proof) $E_1 \wedge E_2 \leq E_1, E_2$ is ok.

$E \leq E_1, E_2 \in \mathcal{E}(c)$ is ok.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(-, c) & & \\ \alpha_1 \swarrow & \downarrow \alpha & \searrow \alpha_2 \\ E_1 & & E_2 \\ \beta_1 \swarrow & & \searrow \beta_2 \\ & & \end{array} \quad \text{is ok.}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(-, c) & & \\ \alpha_1 \swarrow & \downarrow \alpha & \searrow \alpha_2 \\ E_1 & & E_2 \\ \beta_1 \swarrow & \downarrow \langle \beta_1, \beta_2 \rangle & \searrow \beta_2 \\ & E_1 \wedge E_2 & \\ \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \end{array} \quad \text{is ok.}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(-, c) & \xrightarrow{\alpha} & E \\ \alpha_1, \alpha_2 \downarrow & \searrow \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle & \downarrow \langle \beta_1, \beta_2 \rangle \\ E_1 \wedge E_2 & \xrightarrow{\quad} & E_1 \times E_2 \end{array} \quad \text{is ok.} \quad E \leq E_1 \wedge E_2 \quad \text{is ok.}$$

$\neq \emptyset$ and $\text{orb } 12345 \neq \text{orb } 54321$ and $\neq \emptyset$ and $\neq \emptyset$.

Lemma ($\wedge^3$ of orbit = orbit of meet)

$\mathcal{C}$ = small category, $P_1, P_2: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$.

$c \in \text{ob } \mathcal{C}$, $x \in P_1(c)$, $y \in P_2(c)$ and.

$$\text{orb}_{P_1}(x) \wedge \text{orb}_{P_2}(y) = \text{orb}_{P_1 \times P_2}((x, y))$$

or $\text{orb}_{P_1} \wedge \text{orb}_{P_2}$ (orbits of P_1 and P_2)

(proof)

$$\mathcal{C}(-, c) \longrightarrow \langle x \rangle \times \langle y \rangle \longrightarrow P_1 \times P_2$$

$\searrow \quad \nearrow$

$$\langle x \rangle \wedge \langle y \rangle$$

$\mathcal{C}$ Yoneda's lemma and π is

$$(x, y) \in P_1(c) \times P_2(c)$$

$\forall n \geq 2$.

//

Prop ($\mathcal{Z}$: internal ctm)

$\mathcal{C}$: small category $\Rightarrow \mathcal{Z}$ is. $c \in \text{ob } \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{Z}(c) \neq \emptyset$

自然に ctm structure $\Rightarrow \mathcal{Z}$ is $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ -internal ctm is

(proof)

($\top \in \text{ob } \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{Z}(\top)$ is the largest $\pi : T_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{Z}(\top)$ is

terminal presheaf $\Rightarrow \forall \pi : \mathcal{Z}(c) \rightarrow \mathcal{Z}(\top)$ a unique $\pi * c$ in

orbit exists. $\Rightarrow T_c * f = T_{c * f}$

($\wedge \in \text{ob } \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{Z}(c) \times \mathcal{Z}(c) \rightarrow \mathcal{Z}(c)$ on $(\text{orb}_{p_1}(x), \text{orb}_{p_2}(y)) \in \text{ob } \mathcal{Z}(c)$).

$$\wedge \in \mathcal{Z}(c) : (\text{orb}_{p_1}(x) \wedge \text{orb}_{p_2}(y)) * f$$

$$= \text{orb}_{p_1 * p_2}(x, y) * f$$

$$= \text{orb}_{p_1 * p_2}(x, y * f)$$

$$= \text{orb}_{p_1 * p_2}(x * f, y * f)$$

$$= \text{orb}_{p_1}(x * f) \wedge \text{orb}_{p_2}(y * f)$$

$$= (\text{orb}_{p_1}(x) * f) \wedge (\text{orb}_{p_2}(y) * f)$$

$\dashv$

e.g.) $G = \text{群}$ 12 112. $\Rightarrow$ ~~群~~ ¹は. $g^{-1}Gg = G$.

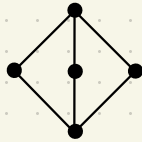
$$g^{-1}(H_1 \cap H_2)g = (g^{-1}H_1g) \cap (g^{-1}H_2g)$$

12 ~~対称~~ 12 113.

e.g.) $\mathbb{Z}$ 上 $\cap$ internal c.m. は. $(\Omega \in \mathbb{Z}, 2) \times \mathbb{Z}$ (1 internal Heiring algebra 12 は 13 11).

12 $\Rightarrow$ 13 13. $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 12 112. $\mathbb{Z} = \text{SubGrp}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

13



$\Rightarrow$ Hasse 図 $\exists \nexists \supset$. $\Rightarrow$ 13 distributive 12 13 11.

§2.4 main thm: classification of hyperquotients of presheaf topoi.

Thm (main theorem)

$\mathcal{C}$: small category 12.12. $\mathbf{X} \in \mathbf{Rat}^{\mathcal{C}} - \text{filter} - \text{hyperquotient}$.

(i) $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ a hyperquotient

(ii) $\mathcal{Z}$ a internal filter

(iii) internal an hom $\mathcal{Z} \xrightarrow{k} \Omega$

(proof) (ii) & (iii) の証明は一般の topos 2.12.

(i) & (ii) に対して できる. hyperquotient $\mathcal{Q}$, 各 $\mathcal{C}$ (object) の $\mathcal{Z}$ のみで決まっている $\Rightarrow$ $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{Q}$ に見え. $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{Z}$ の $\mathcal{C}$ の $\mathcal{Z}$ のみで決まっている $\Rightarrow$ $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{Q}$ の $\mathcal{Z}$ のみで決まっている.

claim 1 (hyperquotient $\leadsto$ internal filter)

$\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \longleftrightarrow \mathcal{Q}$ = hyperquotient 12.12.

$F_c := \{c(-, c) \xrightarrow{\alpha} E : \text{cosieve} \mid \exists p \in \text{ob } \mathcal{Q}, \exists x \in P_c, \alpha = \text{orb}_p(x)\}$

できる $\mathcal{C}$ $\{F_c \subseteq \mathcal{Z}(c)\}$ $c \in \text{ob } \mathcal{C}$ は $\mathcal{Z}$ a internal filter を定める.

claim 2 (hyperquotient $\Leftarrow$ internal filter)

$F \xrightarrow{k} \mathcal{Z}$ = internal filter 12.12.

$\text{Set}^{\text{cop}} \longleftrightarrow \mathcal{Q} : \text{full subcategory } \mathcal{E}.$

$P : \mathcal{E}^{\text{op}} \longrightarrow \text{Set} \text{ is m.u.}$

$P \in \mathcal{Q} \iff \forall c \in \text{ob } \mathcal{C}, \forall x \in P_c, \text{orb}_P(x) \in F_c$

$\mathcal{E} \text{ is } \mathcal{Q} \iff \mathcal{Q} : \text{hyperquotient is th.}$

claim 1 (hyperquotient $\rightsquigarrow$ internal filter)

$\text{Set}^{\text{cop}} \longleftrightarrow \mathcal{Q} : \text{hyperquotient is th.} \quad \exists P \in \text{ob } \mathcal{Q}, \exists x \in P_c, \alpha = \text{orb}_P(x)$

$F_c := \{ c(-, c) \xrightarrow{\alpha} E : \text{cosec} \mid E \in \mathcal{Q} \}$

$\mathcal{E} \text{ is } \mathcal{Q} \iff \{ F_c \subseteq \mathcal{Z}(c) \}_{c \in \text{ob } \mathcal{C}} \text{ is } \mathcal{Z} \text{ a internal filter is th.}$

(proof of claim 1)

$\{ F_c \subseteq \mathcal{Z}(c) \}$ is internal filter is th. $\mathcal{E} \text{ is } \mathcal{Q}.$

(i) $\forall c \in \text{ob } \mathcal{C}, F_c \subseteq \mathcal{Z}(c) = \text{filter}$

(ii) $\forall c \perp c' \text{ in } \mathcal{C}, \forall E \in F_c, \exists x \in E, f \in F_{c'},$

$\text{th. } \mathcal{E} \text{ is } \mathcal{Q}.$

(i) is th. $T_c \in F_c$ is. $1 \in \mathcal{Q}$ is ok.

$\wedge \text{ is th. } \text{orb}_{P_1}(x) \wedge \text{orb}_{P_2}(y) = \text{orb}_{P_1 * P_2}(x \cdot y)$
is ok.

upward closed is th. $\mathcal{Q}$ is quotient is th.

(ii) is th. $P \in \mathcal{Q}, x \in P_c \text{ is th. } \text{orb}_P(x) * f = \text{orb}_P(x * f)$

540k

claim 2 (hyperquotient $\Leftarrow$ internal filter)

$F \xrightarrow{k} \mathcal{F} : \text{internal filter } (2.1.2).$

$\text{Set}^{\text{op}} \leftarrow \mathcal{Q} : \text{full subcategory } \varepsilon.$

$P : \text{Set} \longrightarrow \text{Set} \quad (2.1.1.2).$

$P \in \mathcal{Q} \iff \bigwedge_{c \in \text{ob } \mathcal{C}} \bigvee_{x \in P_c} \text{orb}_P(x) \in F_c$

$\varepsilon \in 2$ ~~is~~ $\exists \varepsilon. \mathcal{Q} : \text{hyperquotient} \quad (2.1.3).$

(proof of claim 2)

$\mathcal{Q}$ is

(i) subobject

(ii) terminal

(iii) binary product

(iv) coproduct

(v) co-subobject

2.1.1.1. $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ is a filter.

(i) & (iv) is easy.

(ii) is. $T_c \in F_c$ for all c .

(iii) is. $\text{orb}_{P_1 \times P_2}((x, y)) = \text{orb}_{P_1}(x) \wedge \text{orb}_{P_2}(y) \in F_c$. F_c is closed under $\wedge$ for all c .

(v) is. $P \in \mathcal{Q}$. $P \xrightarrow{e} P'$, e is epi $\in \mathcal{Q}$.

$c \in \text{ob } \mathcal{C}. \quad x \in P'_c \quad \exists ! p_c \in P_c$.

$P_c \xrightarrow{e_c} P'_c : \text{surj for all } c. \quad y \in P'_c. \quad e_c(y) = x \text{ for } x \in P_c.$

§3 Σ の先

- 位相圏 Σ の対応
- internal description 1 : Σ in elementary topos ↙ $\mathcal{U}$ -h...
- internal description 2 : $\{x \xrightarrow{\text{obj}} \Sigma\}$ 1253 Δx comonad の
公理化.