

§ 1. Solid functor

§ 1.1 定義とモナド

§ 1.2 Solid functor の例

§ 2. 2つの特徴づけ.

§ 2.1 初等的特徴づけ.

§ 2.2 Kan 拡張を用いた特徴づけ

§ 3. 4つの視点

§ 3.1 稠密性.

§ 3.2 連結性

§ 3.3 Epil性

§ 3.4 reflection

§ 3.5 ニミタのまとめ.

§ 4. 進んで話

§ 4.1 Solid functors are "0-connected"

§ 4.2 Factorization System

§ 4.3 Presheaf topos の "co-level" の決定

参考文献

§ 1. Solid functor

§ 1.1 定義とモチベーション

"Solid" は 正確な用語.

Def (Solid functor)

small categories と $\mathcal{C}$ 間の functor

$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ なら solid であるとは,

$\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \xleftarrow{- \circ F^*} \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ が fully faithful

になることをいう.

(Set に限らない話は後に!)

以下、私の個人的なモチベーションを2つ挙げるが、
どちらも今後の話にとって (より良い理解を促すか)
必須ではない.

7.4.1 (quotient topoi)

トポス $\mathcal{E}$ には $\mathcal{C}$ 2. $\mathcal{E}$ の sub-topos である. $\mathcal{E} \xleftarrow{f^*} \mathcal{C} \xrightarrow{f_*} \mathcal{E}$

geometric morphism $\mathcal{C}$, f_* : fully faithful (embedding)

$\mathcal{C} \in \mathcal{E}$ 言う $\mathcal{C}$ あり. $\mathcal{E}$ の "7.2.2" の $\mathcal{C}$ 概念 $\mathcal{C} \in \mathcal{E}$.

quotient topoi である. $\mathcal{E}$ である quotient である.

$\mathcal{E} \xleftarrow{f^*} \mathcal{C} \xrightarrow{f_*} \mathcal{E}$: geometric morphism $\mathcal{C}$ f^* : fully faithful (connected)

$\mathcal{C} \in \mathcal{E}$ いう. quotient topoi は $\mathcal{C} \in \mathcal{E}$ である.

(See: Lawvere Open problems in Topos Theory)

functor $\mathcal{E} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ である $\mathcal{D}$ (essential)

geometric morphism $\mathcal{C} \xleftarrow{F^*} \mathcal{D} \xrightarrow{F_*} \mathcal{C}$

$\mathcal{C} \in \mathcal{E}$ quotient である $\mathcal{C} \in \mathcal{E}$ である.

F : connected $\mathcal{C} \in \mathcal{E}$ である!

7412 (Solid ring)

$\mathbb{Q}$ -vect. sp V, W に対する function $V \xrightarrow{f} W$ は
 $f: \mathbb{Q}$ -linear $\Leftrightarrow f: \text{group hom}$ である。

真分数は限らない

Ring R は solid である $\checkmark$ unique $\mathbb{Q}$ ring hom

$\mathbb{Z} \xrightarrow{!} R$ は $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}$ Ring への epic $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ である。
 ($\mathbb{Q}$ は solid)

実は $R \xrightarrow{\varphi} S$: ring hom に対する

$\text{Mod-}R \xleftarrow{\varphi^*} \text{Mod-}S$ は fully faithful である

φ epic in Ring は同値。

§1.2 Solid functor の例

集合 X と自己写像 $f: X \rightarrow X$ の組 (X, f) が好きなの2',
これに 関与 例え ます 2' 挙げます.

e.g.) 加法モノイドのうちに

$(\mathbb{N}, +, 0) \xrightarrow{i} (\mathbb{Z}, +, 0)$ は Solid である.

実際, $\text{Set}^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$ は 集合と自己写像の圏である,

$\text{Set}^{\mathbb{Z}^{\text{op}}}$ は 集合と自己同射の圏である,

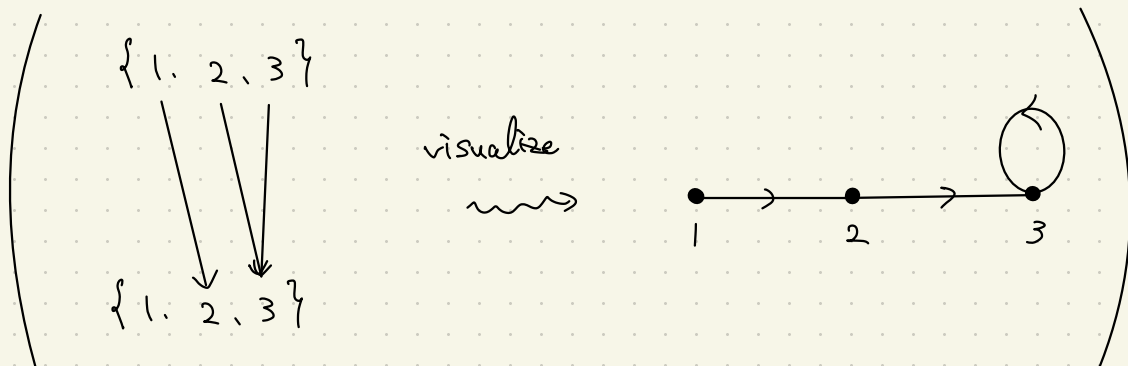
$\text{Set}^{\mathbb{N}^{\text{op}}} \xleftarrow{- \circ i^{\text{op}}} \text{Set}^{\mathbb{Z}^{\text{op}}}$ は Set の fully faithful のうちに

入ります. ($\because$ 射は, どの自己写像と可換な写像)

e.g.) $\text{Set}^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$ の object. 集合と自己写像 (X, f) は

有向グラフで visualize できる.

X は 頂点集合と, $x \in X$ ごとに x から $f(x)$ へ 有向エッジを 与える.



$\Rightarrow$ visualization $\neq$, Solid functor は induce する.

図 $\text{Par} \underset{\tau}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \bullet$ 上の前層図 $\text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}}$ $\in$ 有向グラフ

の圏を思えば $\text{Par} \xrightarrow{F} (N, +, 0)$ を,

S は $0, 1$, τ は $1 \wedge$ 送ることに定める.

induce する $\text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}} \longleftarrow \text{Set}^{\text{N}^{\text{op}}}$ は $\in$ visualization
である. $\Rightarrow$ F は fully faithful であり, F は Solid.

以下, いくつか一般化的例を挙げる

e.g.) $\mathcal{A}$ の localization.

e.g.) Cauchy Completion

e.g.) Surj Group hom

$\vdots$

§2. 2つの特徴づけ.

§2.1 初等的特徴づけ.

この節では, solid functor の初等的な特徴づけを与える. 具体的には与えられる

functor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が solid の判定ができるようにする.

カギとなる道具は $\mathcal{D}$ の射の "分解" の図である.

Def ($\mathcal{D}$ の射の分解の図, $\text{Fac}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D})$)

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ in Cat と $\mathcal{D}$ の射 $d_0 \xrightarrow{\ell} d_1$ について.

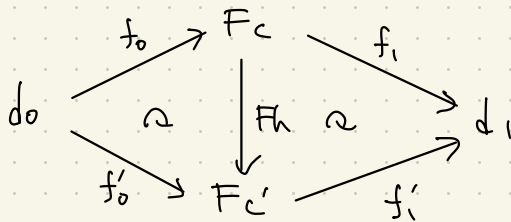
• ℓ の F 分解とは. $\mathcal{C}$ の object $c \in \text{ob } \mathcal{C}$ と,

射 $d_0 \xrightarrow{f_0} F_c$, $F_c \xrightarrow{f_1} d_1$ の組 (f_0, c, f_1) であって, $\ell = f_1 \circ f_0$ となる

$$\begin{array}{ccc} d_0 & \xrightarrow{f_0} & F_c \\ & \searrow \ell & \nearrow f_1 \\ & & d_1 \end{array}$$

をいう.

- $\mathcal{L}$ の F 分解の射 $(f_0, c, f_1) \xrightarrow{h} (f'_0, c', f'_1)$
 とは. $c \xrightarrow{h} c'$ in $\mathcal{C}$ である?



もしもそういふ.

- $\mathcal{L}$ の F 分解を $\mathcal{L}$ の射の 差可圏を $\text{Face}(\mathcal{L})$ と書く.

気持. = 重なる 2 面 $d_0 \downarrow F \downarrow d_1$ みたいな感じ.

Prop (初等的 算数 だけ)

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ in Cat について, TFAE.

(i) $F = \text{Solid}$

(ii) 任意の $d_0, d_1 \in \mathcal{D}$ について. 合成 induce される

$$\int_{c \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(d_0, Fc) \times \mathcal{D}(Fc, d_1) \xrightarrow{\quad} \mathcal{D}(d_0, d_1)$$

is bijective.

(iii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\ell} d_1$ in $\mathcal{D}$ is true.

$\text{Fac}_e(\ell) : \underline{\text{connected}}$. ↗ connected component of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ / $\sim$.

(proof)

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)

(i) $\Leftrightarrow \text{Set}^{\text{cop}} \xleftarrow{- \circ F^{\text{op}}} \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \text{ is fully faithful}$

$\Leftrightarrow \text{Set}^{\text{cop}} \xleftarrow[- \circ F^{\text{op}}]{L_{\text{an}F^{\text{op}}}} \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \text{ a comit } \varepsilon \text{ is iso.}$

↗ (is) comit

$\Leftrightarrow \text{Set}^{\text{cop}} \xleftarrow[- \circ F^{\text{op}}]{L_{\text{an}F^{\text{op}}}} \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \text{ a comit } \varepsilon \text{ is } \nabla \uparrow \text{ and}$
 representable functor $\mathcal{D}(-, d_1)$ is true iso

$\Leftrightarrow \int^{c \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(d_0, F_c) \times \mathcal{D}(F_c, d_1) \xrightarrow{\circ} \mathcal{D}(d_0, d_1)$
 is iso in Set

$\Leftrightarrow$ (ii).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)

$$\int^{c \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(d_0, F_c) \times \mathcal{D}(F_c, d_1) \xrightarrow{\circ} \mathcal{D}(d_0, d_1)$$

これより $d_0 \xrightarrow{l} d_1$ の逆像は coend の def と

set $\mathcal{C}$ の coend の構成法と一致する。

$\text{Fac}_c(l)$ の連結成分は $\sim$ 一致する。

この特徴づけを用いて、§12 見れば $N \xrightarrow{i} \mathbb{Z}$ と

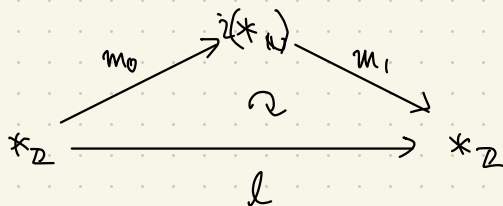
$\text{Par} \xrightarrow{F} N$ が Solid になることを再確認してみる。

e.g.) $(N, +, 0) \xrightarrow{i} (\mathbb{Z}, +, 0)$ の場合。

$\mathbb{Z}$ の射 i.e. 整数 $l \in \mathbb{Z}$ を仮定する。

$\text{Fac}_i(l)$ は、和が l になる整数の組 (m_0, m_1)

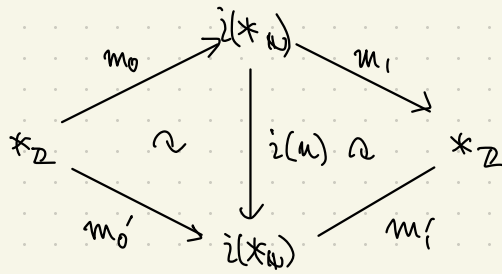
である。



射 $(m_0, m_1) \longrightarrow (m'_0, m'_1)$ は、

非可換性 n $\mathbb{Z}$ に対して $\begin{cases} m'_0 = n + m_0 \\ m_1 = m'_1 + n \end{cases}$

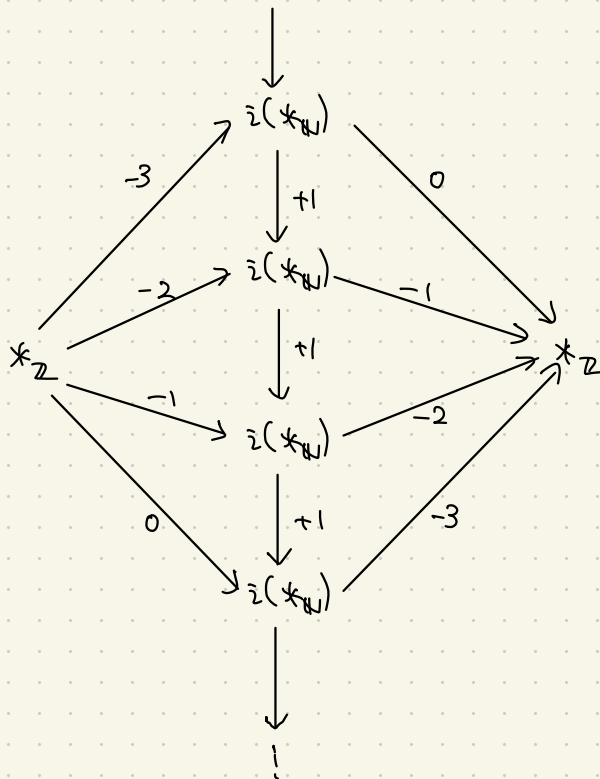
$\#3 \in \mathbb{Z}$ に対して



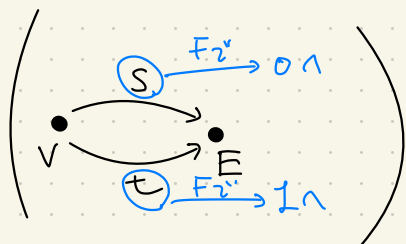
where $\text{Fac}_i(1) \cong (\mathbb{Z}, \leq)$ is equiv of cat is $\#3$.

is a connected category.

$\text{Fac}_i(-3) \cong$

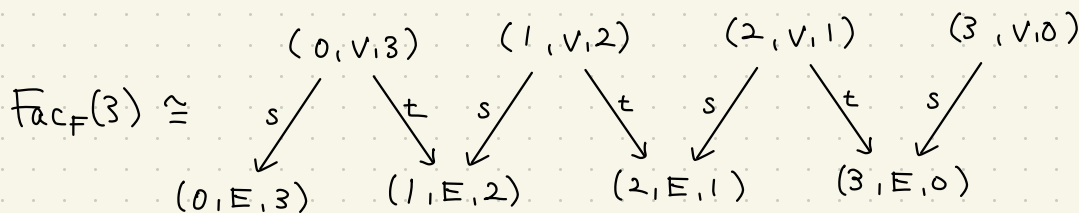


e.g.) $\text{Par} \xrightarrow{F} N$ の場合.



Fac_F を 2223.

例2は, $\text{Fac}_F(3)$ は 2つの Hasse 図 $\Rightarrow$ poset 12 41.
= 12 4 connected.



理論的には. 例2は 2223.

Cor (Solid は self-dual)

$\varepsilon \xrightarrow{F} 2^g$ in Cat 1222.

$\varepsilon \xrightarrow{F} 2^g = \text{Solid} \Leftrightarrow \varepsilon^g \xrightarrow{F^g} 2^{g^g} = \text{Solid}.$

§2.2 Kan 拡張を用いた特徴づけ

後に詳しく述べるが、

$$c \xrightarrow{F} \mathcal{D} = \text{solid} \quad \text{は}$$

$$\left(\Leftrightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \xrightarrow{- \circ F^{\text{op}}} \text{Set}^{c^{\text{op}}} : \text{fully faithful} \right)$$

$$c \xrightarrow{F} \mathcal{D} = \text{dense}$$

$$\left(\Leftrightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\text{Id}} \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \xrightarrow{- \circ F^{\text{op}}} \text{Set}^{c^{\text{op}}} : \text{fully faithful} \right)$$

より強い条件がある。
(実は真に)

$$c \xrightarrow{F} \mathcal{D} = \text{dense}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \searrow F & \nearrow \text{Id}_{\mathcal{D}} \\ & \mathcal{D} & \end{array} : \text{pointwise Left Kan extension}$$

この特徴づけを思い出すと、solid は Kan extension を

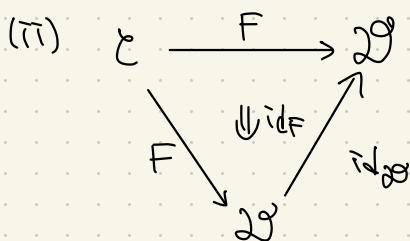
用いた特徴づけであることに期待がたくなる。

実際、pointwise $\cong$ absolute に変更すればよい。

Prop (Kan 拡張を用いた特徴づけ)

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ in Cat について, TFAE

(i) F : Solid



is absolute left Kan extension

(sketch of proof)

(i) $\Leftrightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \xrightarrow{- \circ F^{\text{op}}} \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ a unit η is iso

$\xleftarrow[\text{Res}_{F^{\text{op}}}]{} \perp$

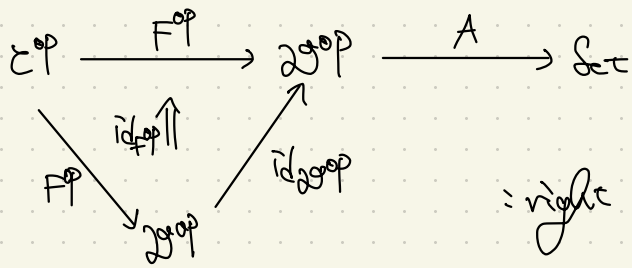
$\Leftrightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \xrightarrow{A} \text{Set}$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{C}^{\text{op}} & \xrightarrow{F^{\text{op}}} & \mathcal{D}^{\text{op}} & \xrightarrow{A} & \text{Set} \\
 & \searrow F^{\text{op}} & \uparrow \epsilon & \nearrow \text{Res}_{F^{\text{op}}} & \\
 & & \mathcal{D}^{\text{op}} & \xrightarrow{\text{sit} \uparrow \eta_A} & \text{Set}
 \end{array}$$

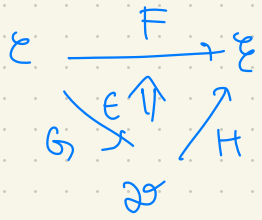
is iso

triangle identity

$\Leftrightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \xrightarrow{A} \text{Set}$

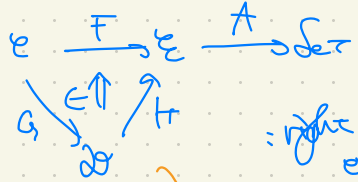


$\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ Fact 12.



absolute right Kan extension

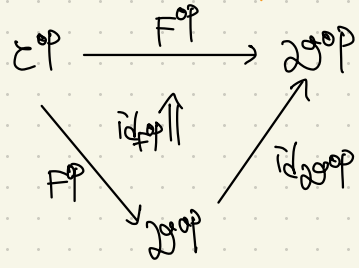
$$\forall \mathcal{E} \xrightarrow{A} \text{Set},$$



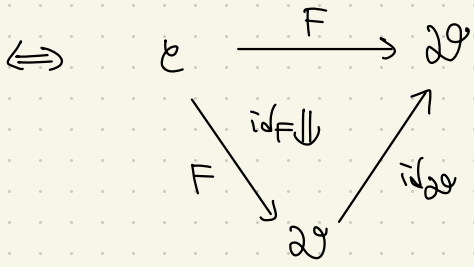
: right Kan extension

($\Leftarrow$ is absolute right Kan extension (Fact 12) $\Rightarrow$ is absolute right Kan extension (Fact 12))

Fact $\Leftrightarrow$



is absolute right Kan extension



is absolute left Kan extension

(Yoneda embedding $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$ is absolute $\Leftrightarrow$ absolute)

Remark (dual)

$$F = \text{Solid} \iff F^{\text{op}} = \text{Solid} \text{ in } \mathcal{C}.$$

$$F = \text{Solid} \iff$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ F \searrow & \uparrow \text{id}_F & \nearrow \text{id}_{\mathcal{D}} \\ & \mathcal{D} & \end{array} : \text{absolute RIGHT Kan extension}$$

is not!

e.g.) Cauchy Completion $\mathcal{C} \xrightarrow{i} \overline{\mathcal{C}}$ is.

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}, \mathcal{D} = \text{Cauchy Complete is not?}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ i \searrow & s'' \nearrow & \nearrow F \\ & \overline{\mathcal{C}} & \end{array}$$

if extension $\mathcal{C} \in \mathcal{C}''$, $\Rightarrow$ is absolute Kan extension.

$$\mathcal{C} < \mathcal{D} \quad \mathcal{C} \xrightarrow{i} \overline{\mathcal{C}}$$

$$\begin{array}{ccc} & \Downarrow \text{id} & \nearrow \text{id}_{\overline{\mathcal{C}}} \\ i \searrow & & \nearrow \\ & \overline{\mathcal{C}} & \end{array}$$

is absolute left Kan extension

is Cauchy Completion is Solid $\mathcal{C} \in \mathcal{C}''$ is not?

§3 4つの視点

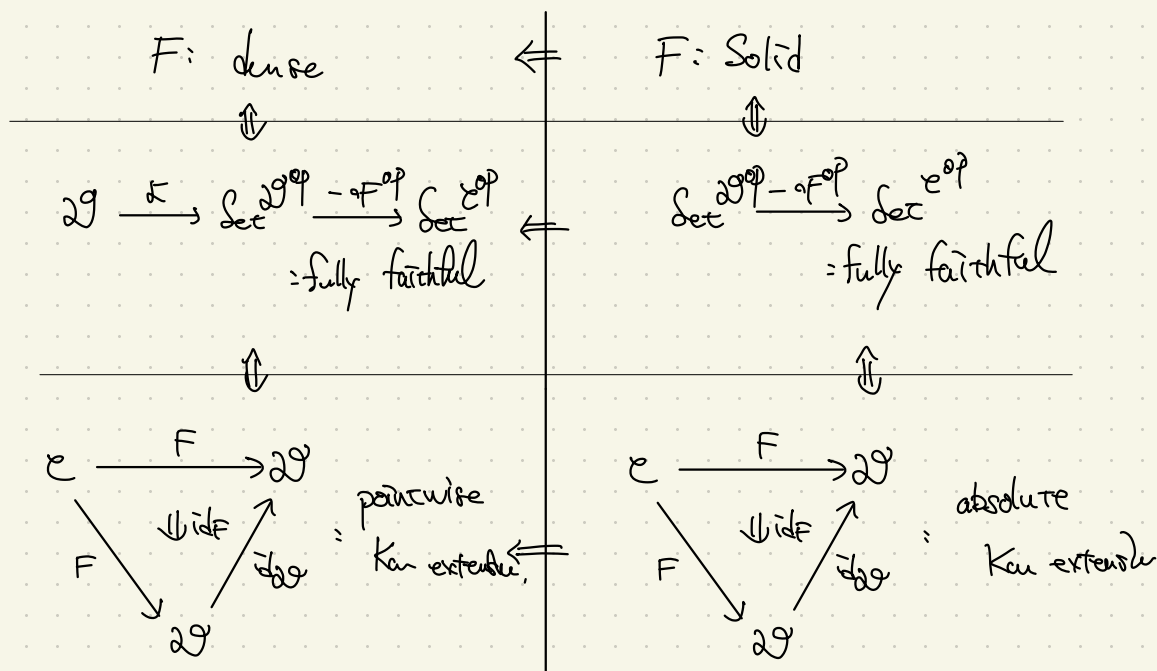
ニニまニ (§1, §2) 2つの主張の内容を1-2に

Solid functor は以下の4つの視点から眺められる

- ① 稠密性
- ② 連結性
- ③ Epi 性
- ④ reflection.

§ 3.1 稠密性.

Kan 条件を用いた特徴づけでも述べたように、
普通の稠密性とは次のような類似がある。



Solidness は ① 絶対稠密性である。

Remark (初等的特徴づけ 112 稠密性見せろか)

$\mathcal{D}$ 内の任意の "区間" $d_0 \xrightarrow{\ell} d_1 \rightarrow d_2$, その間には F の
"像" $\text{Fac}_F(\ell)$ が存在し、連結 $\mathcal{C}$ は Solidness である。
"Connectively dense" は感じもよくない。

$T_2 T_2$: $(\mathbb{Q}, \leq) \rightarrow (\mathbb{R}, \leq)$ は (dense T_2 0^{th}) Solid 2^{nd} ではない。
 の 2^{nd} 多少冷靜に好必要が相対性ではない。

§ 3.2 連結性

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} : \text{Solid} \iff \mathcal{C}_{\text{set}} \xrightarrow{F_*} \mathcal{D}_{\text{set}}$$

: connected geometric morphism

を考えると, Solid は

② (29) 相対化された連結性

と見えた。1つの象徴的事象として。

Prop (Solid は connected $\hat{=}$ “全大”)

small category $\mathcal{C}$ に対する。

$$\mathcal{C} : \text{connected} \iff \mathcal{C} \xrightarrow{!} 1 : \text{Solid}$$

である。

(proof) $\text{Fac}, (\text{id}) \cong \mathcal{C}$ より。

他には, 「濃度 K の discrete category $\mathcal{C}$ 1 Solid functor $\mathcal{C} \rightarrow 1$

$\iff$ 連結成分がちょうど K 個。」

また, 相対化された連結性 $\hat{=}$ 感じの好みと見えてはいる。

§ 3.3 Epilike

圏 $\mathcal{A}$ の射 $X \xrightarrow{f} Y$ が epic 2-射である。

任意の $Z \in \text{ob } \mathcal{A}$ について。

$$\mathcal{A}(X, Z) \xleftarrow{- \circ f} \mathcal{A}(Y, Z) \quad (\text{in Set})$$

が injective である。2-category $\mathcal{A}$ 上の Z について。

Def (lax epimorphism)

2-category $\mathcal{A}$ について, 1-morphism $X \xrightarrow{f} Y$

が lax epic 2-射である。任意の object Z について。

$$\mathcal{A}(X, Z) \xleftarrow{- \circ f} \mathcal{A}(Y, Z) \quad (\text{in Cat})$$

が fully faithful である。

Remark (本当はどうか?)

2-category $\mathcal{A}$ は locally discrete 2-category

である。2-category $\mathcal{A}$ 上の epic 2-category $\mathcal{A}$ 上の

lax epic は一致である。(full な射は epic)

Prop (Solid $\Leftrightarrow$ lax epi)

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ in Cat $\text{is} \text{ } 2\text{-}u2$, TFAE

(i) $F = \text{Solid}$ ($\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \xleftarrow{- \circ F^{\text{op}}} \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \text{ : fully faithful}$)

(ii) $F = \text{lax epi}$ ($\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \mathcal{E}^{\text{op}} \in \text{Category } 2\text{-}u2, \mathcal{E}^{\mathcal{C}} \xleftarrow{- \circ F} \mathcal{E}^{\mathcal{D}} \text{ : fully faithful}$)

(proof)

(i) $\Leftrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$
 $\begin{array}{ccc} & \Downarrow \text{id}_F & \\ F \searrow & & \nearrow \text{id}_{\mathcal{D}} \\ & \mathcal{D} & \end{array}$: absolute left Kan extension

$\Leftrightarrow \exists \mathcal{E}^{\text{op}} \in 2\text{-}u2 \xrightarrow{G} \mathcal{E} \text{ } 2\text{-}u2$

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$
 $\begin{array}{ccc} & \Downarrow \text{id}_G & \\ F \searrow & & \nearrow G \\ & \mathcal{D} & \end{array}$: left Kan extension

$\Leftrightarrow F = \text{lax epi}$

Remark

Cauchy Completion of Solid $\neq$ eif trivial $2\text{-}u2$ $2\text{-}u2$
 lax epi $\in 2\text{-}u2$ non-trivial $2\text{-}u2$ (?)

Solid は ③ lax epimorphism.

§ 3.4 reflection

is a refl is.

$$\mathcal{D} \begin{array}{c} \xleftarrow{F} \\ \perp \\ \xrightarrow{R} \end{array} \mathcal{C} : \text{adjunction is 2.12.}$$

is an comit $\mathcal{C} : FR \longrightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ is iso and is.

$F \in \text{reflection}$ is, $R \in \text{embedding}$ is $\mathcal{C} \in \text{is}$ is.

$$\mathcal{D} \begin{array}{c} \xleftarrow{F} \\ \perp \\ \xrightarrow{R} \end{array} \mathcal{C} \text{ is not is.}$$

$\mathcal{C} : \text{iso} \iff R : \text{fully faithful}$ is "faithful".

fully faithful is. "embedding" is "faithful" is.
 left adjoint is $\mathcal{C} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ is "faithful" is.

is. Solid is. "reflection" is "faithful" is.
 right adjoint is "faithful" is.

Prop (right adjoint $\Leftrightarrow$ solid $\Leftrightarrow$ reflection)

$$\mathcal{A} \xrightleftharpoons[R]{F} \mathcal{B} : \text{adjunction} \Leftrightarrow \text{2 out of 2. TFAE}$$

(i) $F = \text{reflection}$ ($\Leftrightarrow$ counit $\epsilon = \text{iso}$) ($\Leftrightarrow R$ fully faithful)

(ii) $F = \text{Solid}$.

(proof)

$$\text{for } F \vdash R \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \\ F \searrow & \Downarrow \eta & \nearrow R \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} \end{array} : \text{absolute left Kan extension of } F$$

$$\text{2.3. } \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \\ F \searrow & \Downarrow \eta & \nearrow R \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} \end{array} \xrightarrow{F} \mathcal{A} : \text{absolute left Kan extension.}$$

triangle identity #1.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A} \\ F \searrow & \Downarrow \eta & \nearrow \text{id}_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{A} & & \mathcal{A} \end{array} = \begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A} \\ F \searrow & \Downarrow \eta & \nearrow R & \Downarrow \epsilon & \nearrow \text{id}_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{B}}} & \mathcal{A} \end{array}$$

$$\text{4.2. (i)} \Leftrightarrow \epsilon = \text{iso}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A} \\ F \searrow & \Downarrow \eta & \nearrow \text{id}_{\mathcal{A}} \\ \mathcal{A} & & \mathcal{A} \end{array} : \text{absolute Kan extension}$$

$$\Leftrightarrow \text{(ii)}$$

//

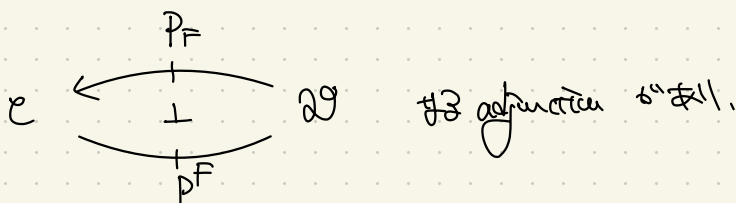
2 の 註 :

④ reflection without right adjoint

は とうり 精密化 した。

が 12 の functor の adjoint 存在 要求 がある (?) 世界、
profunctor がある 3 11. (私は 勉強不足 2022/04)

$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ in Cat 12 112.



その counit は $\int_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(d_0, Fc) \times \mathcal{D}(Fc, d_1) \xrightarrow{\circ} \mathcal{D}(d_0, d_1)$

2 112. counit が iso. という 条件は, 実は既に § 2.12

2172 初等的 特徴 5 17 がある!

(双対的 12, unit が iso $\Leftrightarrow$ fully faithful の 話は
coend calculus の Remark 5.2.1 ~ 5.2.3 12
書いてある)

2172 category of profunctors 2. 今日の 話は 2172 すぐ 読める 期待 12 13.

§ 3.5 $\Rightarrow$ 定理のまとめ.

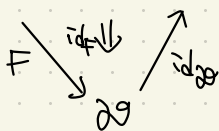
Thm (Solid functor の同値条件)

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ in Cat について, TFAE

(i) F : Solid

(i') F^{op} : Solid (従って, 以下の (ii) ~ (v) の dual になる)

(ii) $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$



= absolute left Kan extension.

(1) Solid は 絶対 稠密性

(iii) 任意の $d_0 \xrightarrow{\ell} d_1$ について, $\text{Fac}_F(\ell)$: connected

(2) Solid は 相対 (F に対して) 連結性

(iv) 任意の圏 $\mathcal{E}$ について, $\mathcal{E}^{\mathcal{D}} \xleftarrow{\circ F} \mathcal{E}^{\mathcal{C}}$: fully faithful

(3) Solid は lax epi

(v) 任意の $d_0, d_1 \in \text{ob } \mathcal{D}$ について,

$$\int^{\mathcal{C}^{\mathcal{E}}} \mathcal{D}(d_0, Fc) \times \mathcal{D}(Fc, d_1) \xrightarrow{\circ} \mathcal{D}(d_0, d_1) \text{ is bijective}$$

(4) Solid は reflection without right adjoint

§ 4. その先の話

quotient topos の $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ の意味がわかる問題
いくつか紹介しておく.

Q 1 Solid - 00 factorization system は何?.

→ 正しい (• Topos 2 の
connected - 00 factorization
• Cancellation property)

Q 2 前層圏の bireflective subcategory は $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ Solid に
induced されるか?

→ 正しい. (• "co-level" of topos
• Ab a bireflective subcategory
↔ solid rings)

Q 3 与えられた小圏 $\mathcal{C}$ について、 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ Solid functor の
Cauchy 同値類 (↔ Set^{op} の bireflective subcategory)
は 高々 small なのか? (• Lawvere's open problems)

→ 不明

参考文献

Adamek, Baskin
Sobral, Velebil ; On functors which are lax epimorphisms.

Baskin, Velebil ; Simultaneously reflective and
coreflective subcategories of preadditives

Núñez, Sousa ; On lax epimorphisms and the
associated factorization.

Lawvere ; Open Problems in Topos Theory.

Bousfield
and Kan : The core of a ring