

§0 導入

§0.1 ニニキゾノ言

§1.2 今日の概要

§1 $\mathcal{Z}$ in a category: existence of $\mathcal{Z}$

§1.1 定義と例

§1.2 存在定理

§2 $\mathcal{Z}$ in CCC: algebraic structure of $\mathcal{Z}$

§2.1 universality of $\mathcal{Z}^n$

§2.2 internal com structure of $\mathcal{Z}$

§3 $\mathcal{Z}$ in topos: classification of hyperquotients by $\mathcal{Z}$

§3.1 対応の概略

§3.2 main theorem: classification of hyperquotients by $\mathcal{Z}$

§ 0 ~~100~~ 1.

§ 0.1 二二番 2" の 譜

先週の発表のrecall 27%.

folded point or presheaf $\mathbb{Z}$ is an internal c.c. structure

2. 因 2, 2 得 2

Thm (internal description of hyperquotients of prestacks)

$\mathcal{C}$: small category $\Rightarrow$ 2. 以下の $\mathbb{T}$ -917 -21-12 対応。

(i) Set^{cop} a hyperquotient

(ii) $\mathcal{L}$ is internal filter

(iii) $\mathbb{Z} \longrightarrow \Omega$: internal ein homomorphism.

§ 1.2 今日の根拠要

今日は、 n thm を、Grothendieck topos を含むような
(elementary) topos のクラスに拡張する。

さて次に、

初め、§1 の local-site classifier を定義し、Grothendieck topos
はこれを持つことを示す。

次に、§2 の CCC は $\mathcal{C}$ の internal cmon structure を持つことを
示す。

最後に、§3 の internal cmon を用いて、Grothendieck topos の
hyperquotient を分類する。

話の概要の流れは矢張りと同じだが、定義される概念 ↑

証明される命題は presheaf topos の $\mathcal{C}$ を抽象化すること
で得られる。

§1 $\mathcal{Z}$ in a category: existence of $\mathcal{Z}$

§1.1 定義と例

Def (locally determined cocore)

$\mathcal{C}$: category について, $L \in \text{ob } \mathcal{C}$ の locally determined cocore とは
以下, LD cocore と書く.
 $\{X \xrightarrow{\eta_X} L\}_{X \in \text{ob } \mathcal{C}}$ であって, 任意の monic $X \xrightarrow{m} Y$ について,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m} & Y \\ \eta_X \searrow & \eta & \swarrow \eta_Y \\ & L & \end{array} \quad \text{が成り立つ.}$$

今回の発表の主人公である. local-state classifier $\mathcal{Z}$
universal な LD cocore として定義する.

Def (local-state classifier)

$\mathcal{C}$: category について, $\mathcal{C}$ の mono からなる subcategory $\mathcal{C}^{\text{mono}} \subseteq \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ の local-state classifier とは, $\mathcal{C}^{\text{mono}}$ の inclusion

$$\mathcal{C}^{\text{mono}} \longrightarrow \mathcal{C} \text{ の colimit (cocore) } \{X \xrightarrow{\eta_X} \mathcal{Z}\}_{X \in \text{ob } \mathcal{C}}$$

のことであり.

e.g.) $\mathcal{C}$: small category なるは. $\{P \xrightarrow{\text{orb}_P} \underline{Z}\} \text{ Prob Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ folded point presheaf

" local-state classifier. ↑ 先達の主人公.

e.g.) $\text{Poset}, \text{Cat}, \text{Group}, \text{Ab}, \text{Vect}_k, \text{Set},$
 $\text{Top}, \text{Manifold}, \text{Lattice}, \text{Ring}, \text{Sh}_X, \text{Top}/X$ なる. terminal

Remark (Terminal な ~~状態~~ 状態)

$\mathcal{C} \xrightarrow{\text{ite}} \mathcal{C}$ の colimit は. terminal な $\mathcal{C}$.

e.g.) Set_X なる. $Z = (\{ \text{Base}, \text{NotBase} \}, \text{Base})$ なる

$$(X, x_0) \xrightarrow{\nabla_{(X, x_0)}} Z$$

$$\left(\nabla_{(X, x_0)}(x) := \begin{cases} \text{Base} & (\text{if } x = x_0) \\ \text{NotBase} & (\text{otherwise}) \end{cases} \right)$$

なる local-state classifier なる.

∈ Set. local-state classifier なる $\exists$ 持たない 図 なる.

e.g.) すべての射が (モノモルフィック) monic な圏と (Tarskian preorder) に同値は. local-state classifier は terminal object のニヒラがある.

Tarskian は, 最大元 $\top$ を持つ poset は, local-state classifier を持つ圏の例がある.

e.g.) elementary topos ではないが, local-state classifier を持つとは限らない. 例として $\mathbf{FinSet}^{\mathbb{Z}}$ は elementary topos ではないが, local-state classifier を持つ. (essentially non-trivial)

§1.2 存在定理

Grothendieck topoi は local-state classifier を持つ (という)
ことを示すため, local-state classifier の存在を示すための
便利甘 + 分条件を探したい.

$\mathcal{C}$: cocomplete としても, $\mathcal{C}^{\text{mono}}$ が小正統性を持つ local-state
classifier が存在する (小正統性とは) 分らない.
どうにかして, small colimit に帰着したいと考える.

こゝで, 前回の発表では presheaf を "folded points" という "素材" の
分解 + 合成 すること考えたことを思い出す. 分解 + 合成 ができる
よい良 "素材" を持つ cocomplete category は local-state classifier
を持つかもしれない!

Notation (Σ^{mono})

圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ の object class $\text{ob } \mathcal{C}$ の subclass $\Sigma \subseteq \text{ob } \mathcal{C}$ について,

Σ の元と Σ の間の (小正統性) mono 射のみを Σ^{mono} と書く.

Def (素対象)

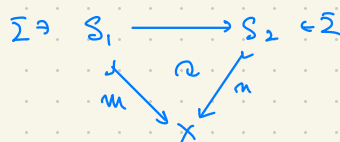
圏 $\mathcal{C}$ の object の subclass $\Sigma \subseteq \text{ob } \mathcal{C}$ が素対象系、と呼ばれる。

以下の同値な 3 つの条件が満たされる (従って全て) を満たすことにしよう。

(i) 任意の $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ について, Σ の元 α は X への mono 射である。

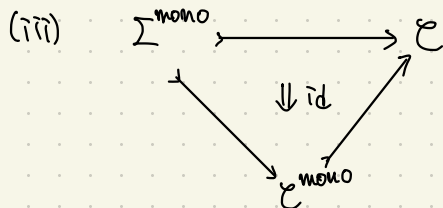
単に素対象系
を定義する
ための

これは可換射的 diagram
が commutative cone になっている



(ii) 任意の $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ について,

図式



: pointwise left Kan extension.

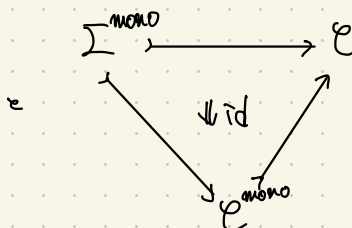
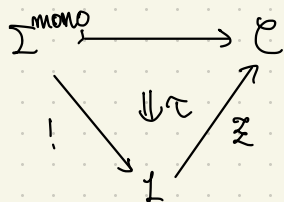
Prop (local-state classifier の存在定理)

$\mathcal{C}$: complete category # Σ : small 対象系, $\Sigma \in \mathcal{C}$,

$\mathcal{C}$ は local-state classifier $\Sigma \in \mathcal{C}$.

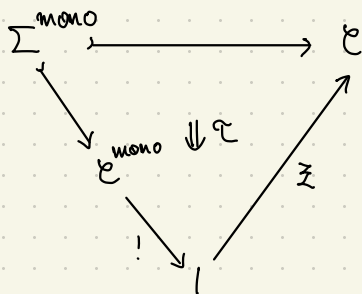
(sketch of proof)

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\quad} \mathcal{C}^{\Sigma^{\text{mono}}} \xrightarrow{\quad} \mathcal{C}^{\Sigma^{\text{mono}}} \text{ universal arrow.}$$

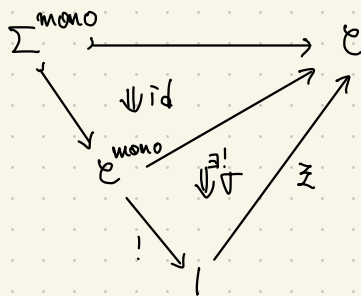


each 2 is a Kan extension

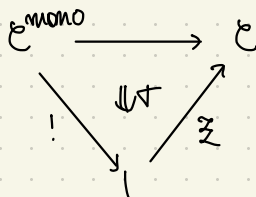
a formal 性質が分る.



=



この分解を得る



local-state classifier $\Sigma \in \mathcal{C}$.

e.g.) T : equational theory $\epsilon \vdash$. $\exists$ a model of T

is $\Sigma = \{\text{finitely generated } T\text{-algebras}\}$ is a material system $\epsilon \vdash$ is a cocomplete

category (i.e.). local-state classifier $\exists$ is not.

Cor (Grothendieck topos is local-state classifier is not)

For a Grothendieck topos is local-state classifier is not.

(proof)

$(\mathcal{C}, \mathcal{J})$: small site $\epsilon \vdash$. $\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ is not.

$P \in \text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ is not a generator.

$\exists c \in \text{ob } \mathcal{C}$, $\underbrace{\text{ay}(c)}_{\text{representable presheaf or sheafification}} \xrightarrow{\exists c} P \text{ is epic}$ is not.

Generators are sheaves of the form small is not.

$\Sigma = \{\text{finitely generated sheaves}\}$ is a material system is not.

- $\text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J}) \hookrightarrow \text{Set}^{\text{op}}$: reflects colimits
- if a sheaf $P \in \text{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ is not a generator, then P is not a subobject of any object.

is not a generator.

§ 2 $\mathcal{Z}$ in CCC : algebraic structure of $\mathcal{Z}$

§ 2.1 universality of $\mathcal{Z}^n$

この2章では、 $\mathcal{Z}$ が (良い圏の中で) internal com structure
を持つことを示す。しかし、これには困難がある。

$\mathcal{Z}$ の $\mathcal{C}$ の universality は colimit である。 $\mathcal{Z}$ の covariant と
representable functor $\mathcal{C}(\mathcal{Z}, -)$ に注目している。 internal algebra
を考へる。 $\mathcal{Z}^n$ を考へたい。 $\mathcal{C}(-, \mathcal{Z}^n) \cong \mathcal{C}(-, \mathcal{Z})^n$ である。
contravariant の universality の方が相性がいい。

この問題を乗り越えるために、 $\mathcal{Z}^n$ の universality (in CCC)
を証明する。 この subsection § 2.1 の目的である。

Lemma (universality of $\mathcal{Z}^n$ in CCC)

$\mathcal{C} : \text{ccc}$, $\{X \xrightarrow{\sigma_X} \mathcal{Z}\}_{X \in \text{ob } \mathcal{C}}$ である。 $n \geq 0$ について、

$$\{X_1 \times \dots \times X_n \xrightarrow{\sigma_{X_1} \times \dots \times \sigma_{X_n}} \underbrace{\mathcal{Z} \times \dots \times \mathcal{Z}}_{n \text{ 回}}\}_{(X_1, \dots, X_n) \in \text{ob } \mathcal{C}^n} \text{ について}$$

$$(\mathcal{C}^{\text{mono}})^n \longrightarrow \mathcal{C}^n \xrightarrow{\prod_{i=1}^n} \mathcal{C} \text{ の colimit cocore を与える。}$$

(sketch of proof)

$\mathcal{C} : \text{ccc}$ である。 任意の $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ について、 $\mathcal{C} \xrightarrow{- \times X} \mathcal{C}$

is left adjoint to π^* , $\pi^* \dashv \pi$ colim π preserve $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ is. $n=2$ case is.

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \left(\operatorname{colim}_{X \in \mathcal{C}^{\text{mono}}} X \right) \times \mathbb{Z}$$

$$\cong \operatorname{colim}_{X \in \mathcal{C}^{\text{mono}}} (X \times \mathbb{Z})$$

$$\cong \operatorname{colim}_{X \in \mathcal{C}^{\text{mono}}} \left(X \times \left(\operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{C}^{\text{mono}}} Y \right) \right)$$

$$\cong \operatorname{colim}_{X \in \mathcal{C}^{\text{mono}}} \left(\operatorname{colim}_{Y \in \mathcal{C}^{\text{mono}}} X \times Y \right)$$

$$\cong \operatorname{colim}_{(X,Y) \in (\mathcal{C}^{\text{mono}})^2} X \times Y$$

the same is easily seen for. - general $n \geq 0$ is true.

induction 2- proof is.

§ 2.2 internal ctm structure of $\mathbb{Z}$

Prop (internal ctm structure of $\mathbb{Z}$ in $\mathcal{C}\mathcal{C}\mathcal{C}$)

$\mathcal{C} : \mathcal{C}\mathcal{C}\mathcal{C}$, $\{X \xrightarrow{\sigma_X} \mathbb{Z}\}_{X \in \text{ob } \mathcal{C}}$: local-state classifier
 is s.t.,

• $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\wedge} \mathbb{Z} \in \mathcal{C}$,
 cocone $\{X \times Y \xrightarrow{\sigma_{X \times Y}} \mathbb{Z}\}_{(X,Y) \in \text{ob } \mathcal{C}^2}$ is corresponding map,

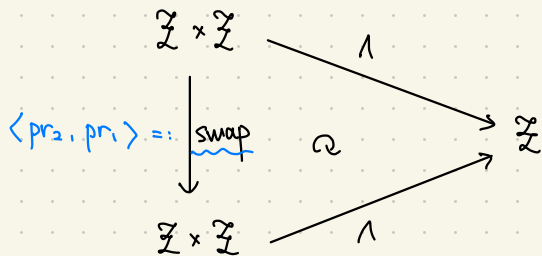
• $1 \xrightarrow{\tau} \mathbb{Z} \in \mathcal{C}$ ($\xrightarrow{\sigma_1} \mathbb{Z}$ is well-defined).

is a ctm. $(\mathbb{Z}, \wedge, \tau)$ is $\mathcal{C}$ -internal ctm is that.

(proof)

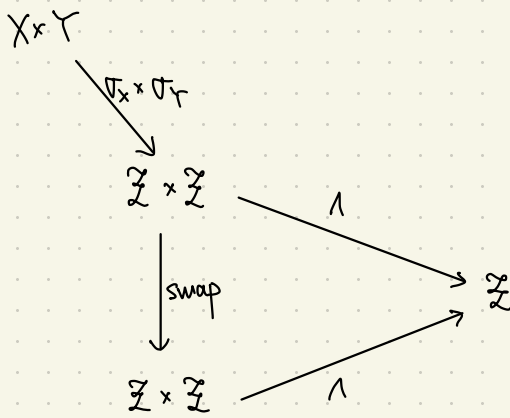
4 axioms to check.

$$\underline{x \wedge y = y \wedge x}$$

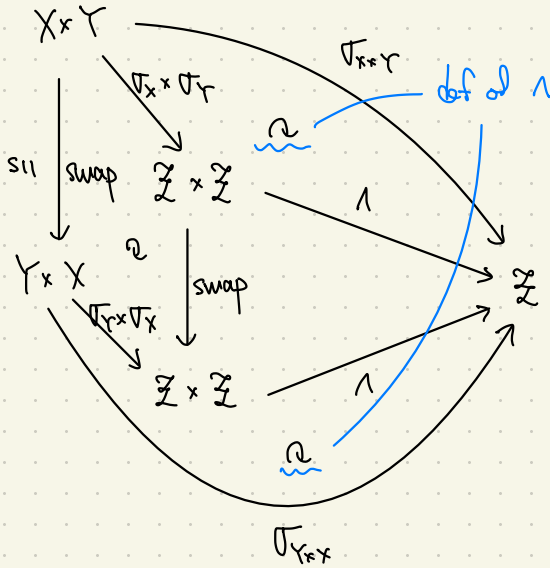


is that.

$(X, Y) \in \text{ob } \mathcal{C}^2$ is arbitrary.



: वरुण है किसेहो!!!!
 $\uparrow$
 ($\because$ colimit cone)



ϵ, σ : LD cocone
 swap: iso (elementary)
 all ok

$$\underline{x \wedge x = x}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{Z}}} & \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \\ & \searrow \text{id}_{\mathcal{Z}} & \downarrow \wedge \\ & & \mathcal{Z} \end{array}$$

可证. 任意 $X \in \text{ob } \mathcal{Z}$.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\Delta_X} & X \times X & & \\ \downarrow \sigma_X & \wr & \downarrow \sigma_X \times \sigma_X & & \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{Z}}} & \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} & \wr & \\ & \searrow \text{id}_{\mathcal{Z}} & \downarrow \wedge & \swarrow \sigma_{X \times X} & \\ & & \mathcal{Z} & & \end{array}$$

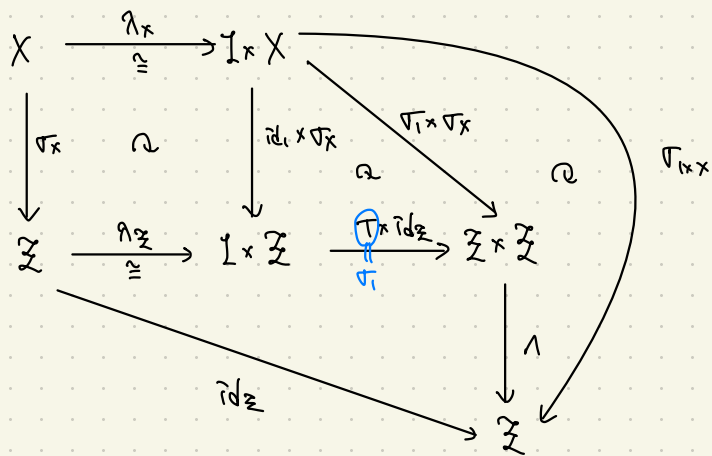
Δ_X : monic & id/c

$$\underline{T \wedge x = x}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow[\cong]{\text{canonical iso}} \eta_{\mathcal{Z}} & 1 \times \mathcal{Z} & \xrightarrow{T \times \text{id}_{\mathcal{Z}}} & \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \\ & & & \wr & \downarrow \wedge \\ & & & & \mathcal{Z} \\ & \searrow \text{id}_{\mathcal{Z}} & & & \end{array}$$

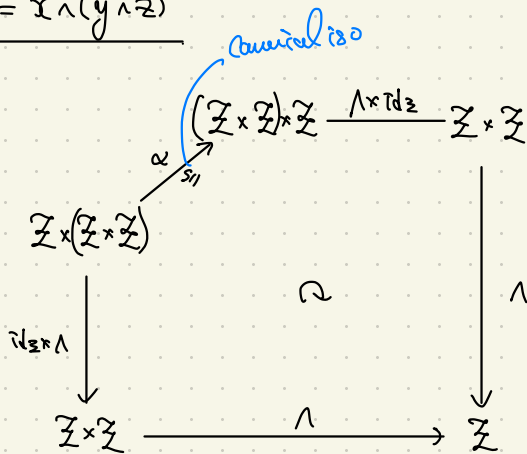
可证.

$X \in \text{ob } \mathcal{Z}$ 任意.



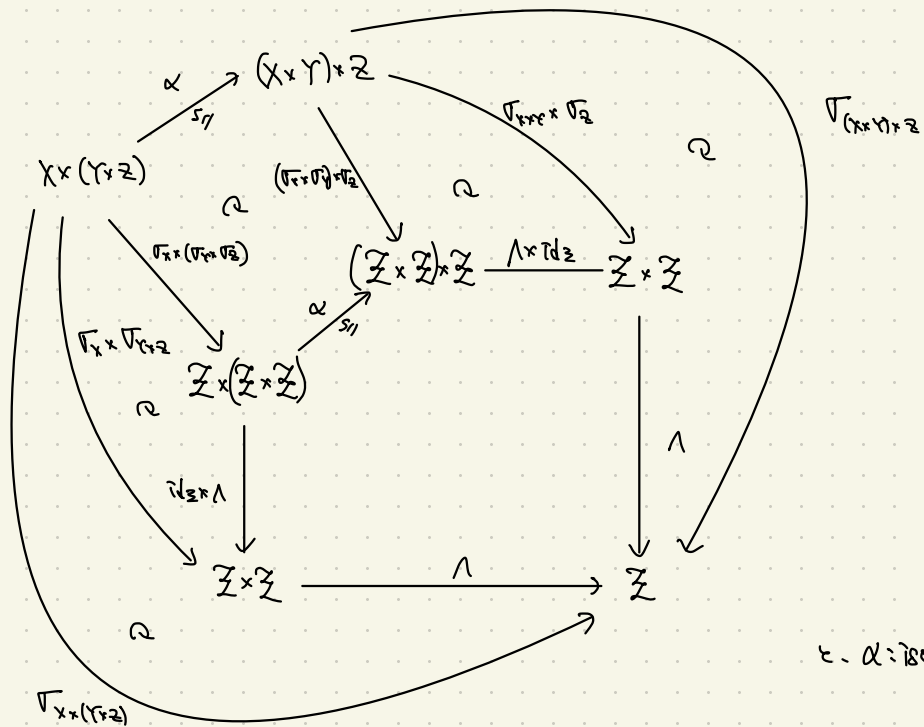
$\epsilon. \gamma_X: \text{iso} (\Rightarrow \text{monic})$ ok

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$



$\epsilon \text{ ok}$

$$(x, y, z) \in \text{ob } \mathcal{C}^3 \quad \Sigma \text{ is } \text{isom} \text{ in } \mathcal{C}^3$$



$\epsilon \cdot \alpha = \text{id}_Z \circ \beta$. ok

§3 in topos : classification of hyperquotients by $\mathcal{Z}$

§3.1 対応の概略.

$\mathcal{Z} \ni$ 用いた hyperquotient $\mathcal{Z} \ni$ 決定 (1211).

$\mathcal{Z}$ の概略 $\mathcal{Z} \ni$ 書く.

Def (coherent subobjects)

図 2. 各 object $\mathcal{Z}$ 上の subobject の族 $\{S_x \xrightarrow{m_x} X\}$

"coherent" であるとは、任意の monic $X \xrightarrow{n} Y$ に対し、

$$\begin{array}{ccc} S_x & \xrightarrow{\exists!} & S_y \\ \downarrow m_x & & \downarrow m_y \\ X & \xrightarrow{n} & Y \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad n^* S_y = S_x \quad \text{in } \text{Sub}_{\mathcal{Z}}(X) \quad (\text{図 2.1.1.1})$$

Lemma (対偶の対応)

$\mathcal{E}$: topos, $\{X \xrightarrow{\sigma_x} \mathcal{Z}\}_{X \in \text{ob } \mathcal{E}}$: local-site classifier

とある。以下に $\mathcal{Z}$ の σ_x の性質を述べる。

(i) coherent の subobject の族 $\{S_x \xrightarrow{m_x} X\}_{X \in \text{ob } \mathcal{E}}$

(ii) $F \xrightarrow{k} \mathcal{Z}$: subobject

(iii) $\mathcal{Z} \xrightarrow{f} \Omega$: map.

(proof)

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は単に Ω の universality.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) は.

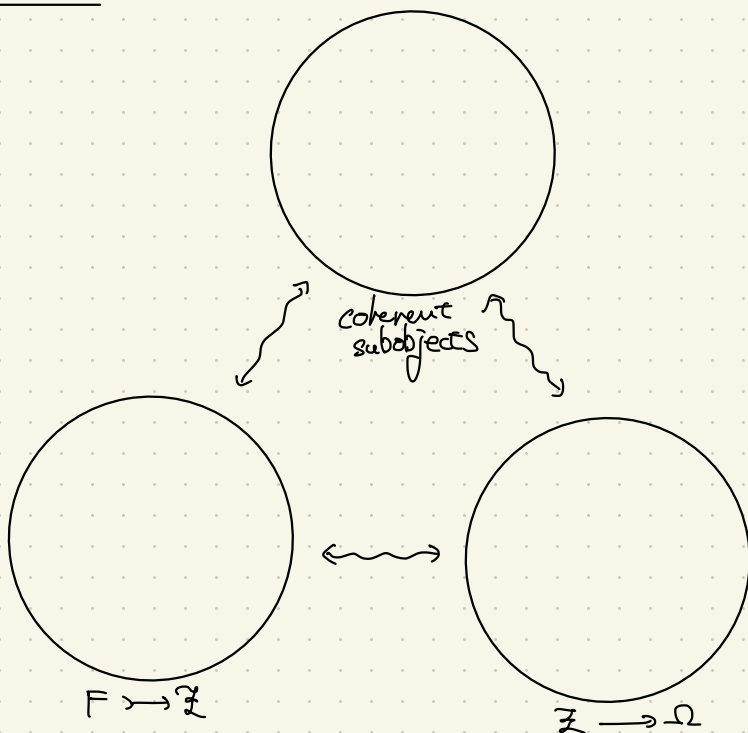
subobjects の族 $\{S_x \xrightarrow{m_x} X\}_{X \in \text{ob } \mathcal{E}} \subset \text{Ar } \mathcal{E}$

$\{X \xrightarrow{\chi_{S_x}} \Omega\}$ に一致.

$\{S_x \xrightarrow{m_x} X\}_{X \in \text{ob } \mathcal{E}} = \text{coherent} \Leftrightarrow \{X \xrightarrow{\chi_{S_x}} \Omega\} : \text{LD cocone}$

これは $\mathcal{E}$ の Ω である.

例 1



2.2. hyperquotient is coherent subobject of $\mathcal{E}$
 の一種とみられる.

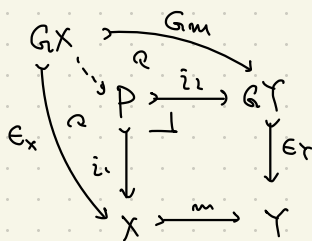
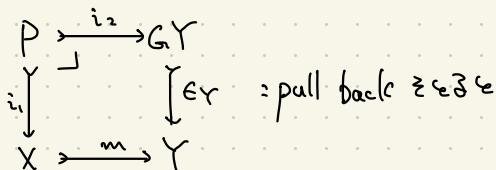
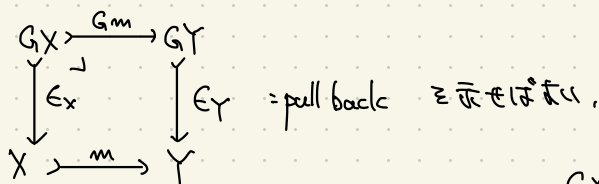
Lemma (hyperquotient $\rightsquigarrow$ coherent subobjects)

$\mathcal{E} = \text{topos}$. $\mathcal{E} \xleftarrow[\perp]{1} \mathcal{Q} : \text{hyperquotient である. } \exists a \in \mathcal{E}$.
 $\{GX \xrightarrow{\epsilon_X} X\}$ is coherent である.

(proof)

$\exists \neq \exists \neq$. $\mathcal{Q} : \text{hyperquotient である, } \epsilon_X \text{ is monic である.}$

$X \xrightarrow{m} Y : \text{monic である.}$



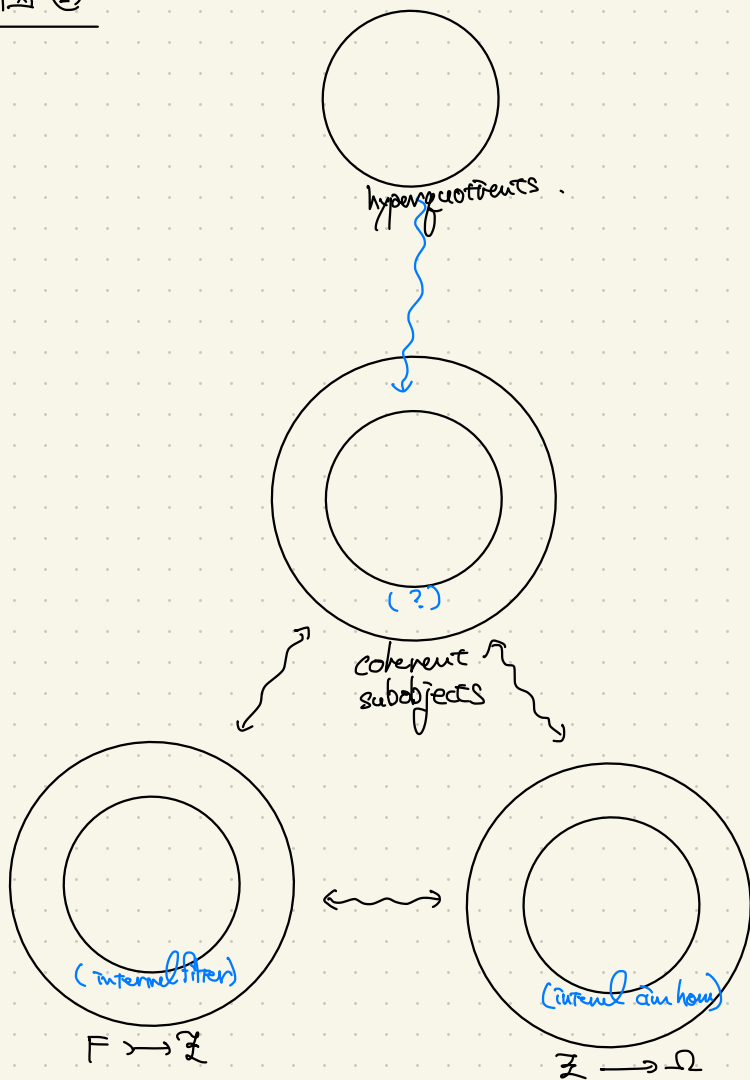
2.4. $GX \leq P$ in $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(X)$.

2.5. P is GY subobject of X . P is $\mathcal{Q}$ 1, 2, 3, 4.

$P \xrightarrow{\exists} GX$
 $\downarrow i_1 \searrow \epsilon_X$
 X is ϵ_X universality ok.

$\mathcal{S}$ の subobject を示すには上の対応を適当に制限すると
 $\text{ix} \rightarrow \text{ix}$ 図 1 は下の図に書ける。

ix-図 ②



§3.2 main theorem: classification of hyperquotients by $\mathcal{E}$

前 subsection §3.1 $\mathcal{E}$ と λ_2 対応 $\mathcal{E}$ 制限 $\mathcal{C}$. 対応 $\mathcal{E}$ 得.

Lemma ($\mathcal{E} \xrightarrow{f} \Omega$: ctm hom a subobject $\in \mathcal{C}$ 記述)

$\mathcal{E}$: topos with local-state classifier $\{X \xrightarrow{\sigma_X} \mathcal{E}\}_{X \in \text{ob } \mathcal{E}}$
 $\in \mathcal{T}_3$. $\{S_X \xrightarrow{m_X} X\}$: coherent $\#$ subobject 族. $\in \mathcal{L}$.

$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \Omega \in \text{対応 } \mathcal{T}_3 \text{ 射 } \in \mathcal{T}_3. \Rightarrow \text{存在.}$

(i) f : preserves $\top \Leftrightarrow S_1 \xrightarrow{m_1} 1$: iso

(ii) f : preserves $\wedge \Leftrightarrow$ 任意 $X, Y \in \text{ob } \mathcal{E}$ 以下.

$$\begin{array}{ccc} S_{X \times Y} & \xrightarrow{\cong} & S_X \times S_Y \\ \downarrow m_{X \times Y} & \circlearrowleft & \downarrow m_X \times m_Y \\ X \times Y & & \end{array}$$

ie. $\text{Sub}_{\mathcal{E}}(1)$ 中で最大.

(proof)

(i) f : preserves $\top$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} & \mathcal{E} & \\ \sigma_1 \nearrow & & \downarrow f \\ 1 & & \Omega \\ \text{true} \searrow & \circlearrowleft & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{\cong} & 1 \\ m_1 \searrow & \circlearrowleft & \downarrow \text{id}_1 \\ 1 & & \end{array}$$

$\mathcal{E}$ 対応 $\mathcal{T}_3$ subobject 存在.

(ii) f : preserves $\wedge$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{E} \\ \downarrow k \times k & \sim & \downarrow k \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in \text{ob } \mathcal{E}$

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ \downarrow \sigma_x \times \sigma_y & \searrow \sigma_{x \times y} & \\ \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{E} \\ \downarrow k \times k & \sim & \downarrow k \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

$\mathcal{E}$

Ω

} ~~not~~ to subject $\mathcal{E} = \mathcal{E}$.

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} S_{X \times Y} & \xrightarrow{\cong} & S_X \times S_Y \\ \downarrow m_{X \times Y} & \sim & \downarrow m_X \times m_Y \\ X \times Y & & X \times Y \end{array}$$

左 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 右

$$\begin{array}{ccc} & S_X \times S_Y & \\ \swarrow \text{id}_{S_X} \times m_Y & \vee & \searrow m_X \times \text{id}_{S_Y} \\ S_X \times Y & & X \times S_Y \\ \swarrow m_X \times \text{id}_Y & & \searrow \text{id}_X \times m_Y \\ X \times Y & & X \times Y \end{array}$$

$\cong$ 使, 2, 3.

Remark

$\mathcal{Z} \xrightarrow{f} \Omega$: internal ctm $\sim$ "ある" だけ.

$\{S_x \mid X \in \text{ob } \mathcal{E}\}$ # finite product $\sim$ 閉 $\cup$ "ある" だけ

n 条件 だが 必要 + 十分 ではない. 例: $\mathbb{Z}$ について.

$\{S_x \mapsto X\} \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}$ 型 $\in \{x\} \cap \mathbb{Z}$ 型 orbit α を取り出す
coherent subobjects $\in \mathbb{Z}$. $\{S_x\}$ は finite product $\sim$ $\in \cup$ "ある" だけ.

対応する $\mathcal{Z} \xrightarrow{f} \Omega$ は internal ctm have $\sim$ ない.

実際, $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}$. $S_{X \times Y} = X \times Y \neq 0$.

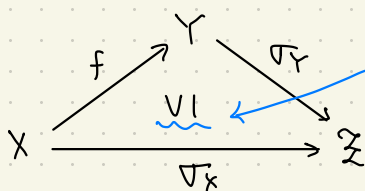
$S_x \times S_y = X \times 0 = 0 \in \mathbb{Z}$.

もう 1 つ. 技術的 的 Lemma を 示す だけ.

Lemma (local-state classifier $\wedge$ 可換性)

$\mathcal{E} : \text{topos}$, $\{X \xrightarrow{\sigma_X} \mathcal{Z}\}_{X \in \text{ob } \mathcal{E}}$: local-state classifier

と する. $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{E}$ について.



$\mathcal{Z}$ is internal ctm str $\& \cup$.
canonical $\in$ ctm $\in$ $\mathbb{Z}$.

in ctm $\mathcal{E}(X, \mathcal{Z})$

(proof) " $x \leq y \iff x \wedge y = x$ " $\& \cup$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\sigma_X} & Z \\
 \downarrow \langle \sigma_X, \sigma_Y, f \rangle & \circlearrowleft & \uparrow 1 \\
 Z \times Z & &
 \end{array}$$

を示せばよい.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\sigma_X} & Z \\
 \downarrow \langle \sigma_X, f \rangle & \circlearrowleft & \uparrow 1 \\
 X \times Y & \xrightarrow{\sigma_X \times \sigma_Y} & Z \\
 \downarrow \sigma_X \times \sigma_Y & \circlearrowleft & \\
 Z \times Z & &
 \end{array}$$

よく.

Lemma 3.112 main thm 3.117.

Thm (classification of hyperquotients by Z)

$\mathcal{E}$: topos, $\{X \xrightarrow{\sigma_X} Z\}$: local-state classifier $\in \mathcal{P}\mathcal{B}$.

case $\mathcal{E}$, $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ $\mathcal{P}\mathcal{B}$ $\mathcal{A}$ $\mathcal{P}\mathcal{B}$ $\mathcal{B}$ $\mathcal{P}\mathcal{B}$.

(i) $\mathcal{E}$ is a hyperquotient

(ii) $F \xrightarrow{k} Z$: internal fiber

(iii) $Z \xrightarrow{j} \Omega$: internal c.m. hom

(proof)

(ii) $\leadsto$ (iii) は Σ を $\mathcal{L} \in \mathcal{C}$ internal c.m. #3 成立 $\forall \Sigma \in \Sigma$

先図示した. ("The subobject classifier is the filter classifier")

Ex. 1 Σ を示した対応を制限 $\forall \Sigma \in \Sigma$ 考へた. $\Rightarrow \Sigma \circ 2 \circ a \in \Sigma$

示せば +1p.

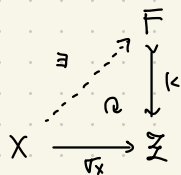
Step 1 (i) $\leadsto$ (iii)

$\Sigma \xleftarrow[\underset{G}{\downarrow}]{\perp} Q$: hyperquotients $\in \Sigma \in \Sigma$. $\{GX \xrightarrow{G_X} X\}$ は Σ 対応

則 $\Sigma \xrightarrow{f} \Omega$ は internal c.m. hom Σ あり.

Step 2 (ii) $\leadsto$ (i)

$F \xrightarrow{k} \Sigma$: internal filter #3.



これは X 上の full subcategory $\Sigma \xleftarrow{\quad} Q$ は hyperquotient である.

これは $F \xrightarrow{k} \Sigma$ は Σ 上の coherent subobjects

$\{S_X \xrightarrow{m_X} X\}$ $\left(\begin{array}{ccc} S_X & \xrightarrow{\quad} & F \\ m_X \downarrow & \lrcorner & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{\sigma_X} & \Sigma \end{array} \right)$ は adjunction

$\Sigma \xleftarrow[\perp]{\quad} Q$ n count Σ -致 $\forall \Sigma$.

まず Step 1 あり.

Step 1 ((i) $\rightsquigarrow$ (iii)) (再掲)

$\mathcal{E} \xrightleftharpoons[\perp]{G} \mathcal{Q}$: hyperquotients である. $\{GX \xrightarrow{e_X} X\}$ は双対的

射 $Z \xrightarrow{f} \Omega$ は internal c.m. hom である.

Lemma 4.1.

(i) $G1 \xrightarrow{e_1} 1$: iso

(ii) $G(X \times Y) \xrightarrow{\cong} GX \times GY$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ & \searrow^{e_{X \times Y}} & \swarrow_{e_X \times e_Y} \\ & X \times Y & \end{array} \quad \cong$$

を示す必要あり.

= 4.1. $\mathcal{E}$ is a lex comonad G on finite product $\mathcal{E}$ 保つこと
が成る.

Step 2 ((ii) $\rightsquigarrow$ (i)) (再掲)

$F \xrightarrow{k} Z$: internal filter あり.

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \nearrow \exists & \downarrow k & \\ X & \xrightarrow{\pi_X} & Z \end{array}$$

ある X がある full subcategory $\mathcal{E} \xrightleftharpoons[\perp]{G} \mathcal{Q}$
は hyperquotient である.

つまり $F \xrightarrow{k} Z$ は 双対的 coherent subobjects

$$\{S_x \xrightarrow{m_x} X\} \quad \left(\begin{array}{ccc} S_x & \xrightarrow{\quad} & F \\ m_x \downarrow & \lrcorner & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{\sigma_x} & Z \end{array} \right) \text{ is adjunction}$$

$$\mathcal{E} \xrightleftharpoons[\perp]{} \mathcal{Q} \text{ is comit } \varepsilon\text{-consistent.}$$

LEMMA. $X \in \text{ob } \mathcal{E}$ and $S_x \xrightarrow{m_x} X$ is true

$$\begin{array}{ccccc} & & S_x & \xrightarrow{\quad} & F \\ & \nearrow \text{id}_{S_x} & \downarrow m_x & \lrcorner & \downarrow k \\ S_x & \xrightarrow{m_x} & X & \xrightarrow{\sigma_x} & Z \\ & \searrow \sigma_{S_x} & & & \end{array}$$

LEMMA. $S_x \in \mathcal{Q}$ is true.

$X \in \mathcal{Q}$ is true.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & F \\ \text{id}_X \downarrow & \lrcorner & \downarrow k \\ X & \xrightarrow{\sigma_x} & Z \end{array}$$

LEMMA. $S_x = X$ is true.

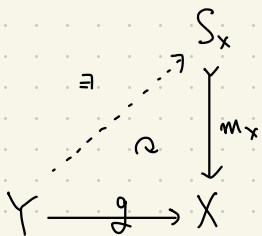
isomorphic

LEMMA. $\mathcal{Q}$ is the full subcategory of $\mathcal{E}$ consisting of S_x and X is true. $\mathcal{Q}$ is finite product closed.

$$\mathcal{E} \xrightleftharpoons[\perp]{} \mathcal{Q} \text{ and } \{S_x \xrightarrow{m_x} X\} \text{ is comit is true.}$$

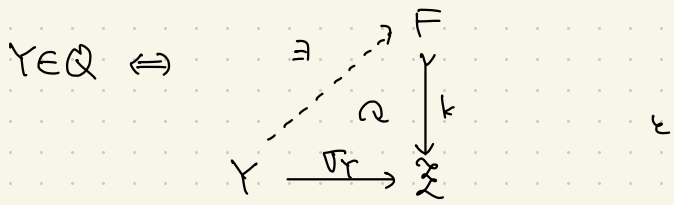
right adjoint is true.

$Y \in \text{ob } \mathcal{Q}$ and $Y \xrightarrow{g} X$ is true.

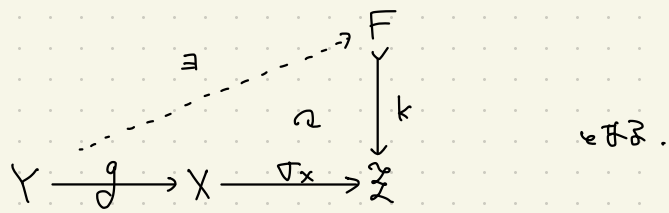


と分けて置くことはできない。

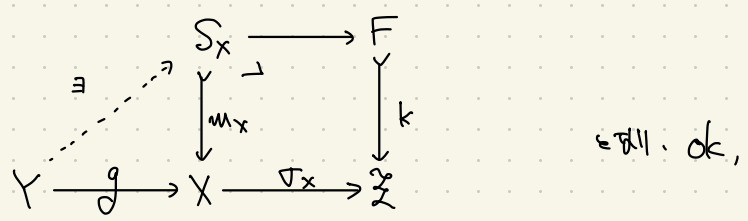
$F \xrightarrow{k} \mathcal{Z}$ は internal filter 2. $\mathcal{F}$ は upward closed $\mathcal{O}a_2^1$.



Lemma 1.3.3 $\sigma_Y \leq \sigma_X \circ g$ in $\mathcal{E}(Y, \mathcal{Z})$ 41



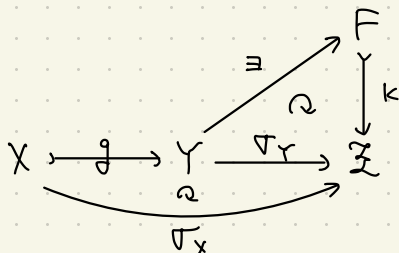
3.3. pull-back universality 41



4.2. $\mathcal{E} \xleftarrow[\mathcal{G}]{\perp} \mathcal{Q}$: quotient 12.41. $\{S_x \xrightarrow{m_x} X\}_{x \in ob \mathcal{E}}$

$\mathcal{E}$ complete (= $\mathcal{F}\mathcal{F}$) 2. $\mathcal{F}^2$ 41, 72.

$\alpha \in \Gamma$ は ∞ quotient かつ hyperquotient である。

$$X \xrightarrow{g} Y : \text{monic} \in \mathcal{C}, Y \in \mathcal{Q} \nmid S.$$


Ex. $X \in \mathbb{Q}$ is not.

52. Qは subject 2 係り 2, hyperquotient 2 2.

二れで、 $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}$!!
