

① リーマンの ζ (解析的ではなく) "代数的に" 捉える.

② ユーリウス反転は " $\mu = \zeta^{-1}$ " であることを見る. ↑ 高次元

③ "総和演算子" と ζ を一般化する. ↓ 環の圏

④ ユーリウス反転を一般化し.

- (古典的) ユーリウス反転
- 和分 $\leftrightarrow$ 差分
- 包除原理
- $\vdots$

を合え' 総和演算とその逆' を調べる道具になっている
ことを見る

§1. Introduction $\zeta \times \mu = 1$?? (高校数学)1.1. リーマンの ζ と オイラー の 等式

1.2. (古典的) ヌビウス 反転

1.3. 形式的 テーラー級数

関係は
代数的に証明背景は $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

§2. 圏の incidence algebra (環 = 圏の定義)

2.1. (fine) incidence algebra

2.2. 一般化 ヌビウス 反転 main "theorem"

2.3. 具体例

→ 本題終了

§3. 発展的内容 についで具体例 (環 = 圏の定義)

3.1. (coarse) incidence algebra.

3.2. 圏の オイラー 標数

§1. Introduction $\zeta \times \mu = 1$??

3/20

1.1. リーマンの ζ と オイラー の 等式

リーマンの ζ は.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

これは $(\text{Re } s > 1)$ 上の、 ζ は ζ を 解析接続した関数である。

ζ は、次の オイラー の 等式 を 基点、として、

素数の情報をもつ (らしい)。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad (\text{オイラー の 等式})$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} + \dots \right) \\
 &\times \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \right) \\
 &\times \left(\frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^s} + \dots \right) \\
 &\times \dots
 \end{aligned}$$

Diagram: Blue circles highlight the first term of each series in the expansion. Blue arrows point from these circles to the term $\frac{1}{18^s}$ in the expansion of the first series, illustrating the product of the first terms from the first two series.

1.2. (古典的) ヌビウス反転

1/20

今回, $\begin{cases} \mathbb{N}_+ := \{1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\} \end{cases}$ という記法を用いる.

Def (ヌビウス関数)

ヌビウス関数 $\mu: \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ を,

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^k & (n \text{ は相異なる } k \text{ 個の素数の積}) \\ 0 & (\text{それ以外 i.e. 平方因子を含むとき}) \end{cases}$$

と定める.

e.g.) $\mu(1) = 1, \mu(2) = -1, \mu(3) = -1, \mu(4) = 0$
 $\mu(5) = -1, \mu(6) = 1, \mu(7) = -1, \dots$

ヌビウス関数については、次が知られている

Prop (ムビウス反転)

任意の $F, G: \mathbb{N}_> \longrightarrow \mathbb{C}$ について.

$$\forall n \in \mathbb{N}_>, \quad F(n) = \sum_{d|n} G(d)$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_>, \quad G(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot F\left(\frac{n}{d}\right)$$

e.g.) オイラー関数

$n \in \mathbb{N}_>$ について. $\phi(n) := \#\{k \in \mathbb{N}_> \mid 1 \leq k \leq n, n \text{ と } k \text{ は互いに素}\}$

と可. F として $\text{id}_{\mathbb{N}_>}$ を, G として ϕ を選ぶ.

$$n = \sum_{d|n} \#\{k \in \mathbb{N}_> \mid 1 \leq k \leq n, \gcd(k, n) = d\}$$

$$= \sum_{d|n} \phi(d)$$

と可. ムビウス反転可.

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$p: n \text{ の素因数}$

が分かる.

$$\text{e.g.) } 12 = \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(4) + \phi(6) + \phi(12) \quad \left(\frac{6}{30}\right)$$

$$= 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4$$

$$\phi(12) = \mu(1) \cdot 12 + \mu(2) \cdot 6 + \mu(3) \cdot 4 + \mu(4) \cdot 3 + \mu(6) \cdot 2 + \mu(12) \cdot 1$$

$$= 12 - 6 - 4 + 0 + 2 + 0$$

$$= 4.$$

$$\phi(12) = 12 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 4$$

1.3. 形式的ディリクレ級数

Q. Riemann の ζ と χ の反転の関係は?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad (\text{オイラーの等式})$$

$$\text{は、} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) \times \left(\prod_{p:\text{prime}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \right) = 1$$

と見ることもできる。 / 確かめる

17/30

$$\prod_{p \text{ prime}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \times \dots$$

$$= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{10^s} - \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

つまり、 ζ が成立している

$$\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)}_{\zeta} \times \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right)}_{\mu} = 1 \quad (\text{オイラーの等式の逆})$$

$\leadsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ の形をした級数たちの代数構造に

注目!

Def (形式的ディリクレ級数 (環))

複数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対応する形式的ディリクレ級数

(ディリクレ形母関数) とは、形式和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ のこと

言。2つの形式的ディリクレ級数の和と積は良きほうに、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ の $\frac{8}{20}$

$$\left(\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \right) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n^s} \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \right) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\underbrace{\left(\sum_{n=k+l} a_k b_l \right)}_{\text{乗積和}}}{n^s} \end{aligned} \right)$$

定まる。

e.g.) 形式的ディリクレ級数の積の例

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{4}{3^s} + \frac{2}{4^s} + \dots \right) \\ & \times \left(\frac{3}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{3}{4^s} + \dots \right) \\ & \quad \quad \quad \sim 2 \times 3 + 1 \times 1 + 2 \times 3 = 13 \\ & = \left(\frac{6}{1^s} + \frac{5}{2^s} + \frac{14}{3^s} + \frac{13}{4^s} + \dots \right) \end{aligned}$$

Remark

§2で一般の場合が見える。これは (単位的) 環になる。

2つの形式的ディリクレ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ を

と見なせば、 μ を書いて (か) と。互いに逆立する。

Prop (μ は ζ の逆数)

$$\zeta \times \mu = 1$$

$$\mu \times \zeta = 1$$

(proof)

示すことは、 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases} \quad \text{である。}$$

$n = p_1^{a_1} \times \dots \times p_k^{a_k}$ と素因数分解すると、

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \prod_{i=1}^k \left(\underbrace{\mu(p_i^0)}_1 + \underbrace{\mu(p_i^1)}_{-1} + \dots + \underbrace{\mu(p_i^{a_k})}_0 \right)$$

となり ok

(どんな環 (交換性) でも) 逆元が存在する

互いに積の逆元である a, b について

$- \times a$ と $- \times b$ は逆操作になる。

Cor (メルゼン反転 . 形式的ディリクレ級数の可逆性)

任意の $F, G: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ について,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n)}{n^s} \times \zeta$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} \times \mu$$

(proof)

($\Rightarrow$) 両辺に μ をかける

($\Leftarrow$) 両辺に ζ をかける //

形式的ディリクレ級数の代数構造 (環構造) が偉い。

Q 形式的ディリクレ級数の代数構造は
どこから?

($\leadsto$ 4 ページ後, (141 ページ)
A, $\exists$ イド $(\mathbb{N}_0, 1, \times)$ だぞ!)

§2. 圏の incidence algebra

11/30

2.1. (fine) incidence algebra

アイディア

圏の incidence algebra は、圏の合成の構造を

ℂは簡単のため

反映いた環構造である。

元は、この射の形式和 $\sum_{f \in Mor C} a_f \cdot f \quad (a_f \in \mathbb{C})$

$$\sum_{f \in Mor C} a_f \cdot f + \sum_{f \in Mor C} b_f \cdot f = \sum_{f \in Mor C} (a_f + b_f) \cdot f \quad \text{と和}$$

する。

重要なものは積である。

$$\left(\sum_{f \in Mor C} a_f \cdot f \right) \times \left(\sum_{f \in Mor C} b_f \cdot f \right) := \sum_{f \in Mor C} \left(\sum_{f=hog} a_g \cdot b_h \right) f$$

としたい。 $\sum_{f=hog} a_g \cdot b_h$ は $\sum_{\substack{f \\ g \rightarrow f \rightarrow h}} a_g \cdot b_h$ と書くのがいい。
 (g=hの順番は二つの
 100%いい)

⇒ 2", $\sum_{\substack{f \\ g \rightarrow f \rightarrow h}} a_g \cdot b_h$ が有限和になる圏を考える。

Def (finitely finite category)

圏 $\mathcal{C}$ が finitely finite であるとは、($\mathcal{C}$ が小圏であること)

任意の射 $f \in \text{Mor } \mathcal{C}$ について、

$$\# \{ (g, h) \in (\text{Mor } \mathcal{C})^2 \mid f = h \circ g \} < \infty$$

なることを言う。

CF

Def (fine) incidence algebra

finitely finite category $\mathcal{C}$ について、 $\mathcal{C}$ の incidence algebra

直積

$\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ とは、 $\mathbb{C}$ -線形空間 $\mathbb{C}^{\text{Mor}(\mathcal{C})}$ を台に持ち、

$$(a_f)_{f \in \text{Mor}(\mathcal{C})} \times (b_f)_{f \in \text{Mor}(\mathcal{C})} = \left(\sum_{\substack{(g, h) \in \text{Mor } \mathcal{C}^2 \\ f = h \circ g}} a_g \cdot b_h \right)_{f \in \text{Mor}(\mathcal{C})}$$

を積に持ち $\mathbb{C}$ -代数のときを言う。

$\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ の元 $(a_f)_{f \in \text{Mor}(\mathcal{C})}$ のとき、 $\sum_{f \in \text{Mor } \mathcal{C}} a_f \cdot f$ と書く、

乗に $\sum_f a_f \cdot f$ と書くことも。

Prop (incidence algebra is $\mathbb{C}$ -algebra)

finely finite category $\mathcal{C}$ について. $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ は

$$\delta := \sum_f \delta_f \cdot f \quad , \quad \left(\delta_f := \begin{cases} 1 & (f \text{ is identity}) \\ 0 & (\text{other}) \end{cases} \right)$$

を積の単位元 1 として (可換とは限らない) (単位的) 環である.

(proof)

$$\begin{aligned} \text{(単位性)} \quad \left(\sum_f a_f \cdot f \right) \times \delta &= \sum_f \left(\sum_{\substack{g \rightarrow f \\ \text{identity}}} a_g \cdot \delta_h \right) \cdot f \\ &= \sum_f \left(\sum_{\substack{g \rightarrow f \\ \text{identity}}} a_g \right) \cdot f \\ &= \sum_f a_f \cdot f \quad \text{逆も同様} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(結合性)} \quad & \left(\left(\sum_f a_f \cdot f \right) \left(\sum_f b_f \cdot f \right) \right) \left(\sum_f c_f \cdot f \right) \\ &= \sum_f \left(\sum_{\substack{g \rightarrow f \\ \text{identity}}} a_g \cdot b_h \cdot c_i \right) \cdot f \\ &= \left(\sum_f a_f \cdot f \right) \left(\left(\sum_f b_f \cdot f \right) \left(\sum_f c_f \cdot f \right) \right) \end{aligned}$$

(分配性) 略

e.g.) (形式的ディリクレ級数環)

$\exists \text{ID } (N, \times, 1)$ は一点圏 $\mathcal{C}$ 2 finely finite である
(i.e. $\forall m, \#\{(k, l) \in N \mid m = l \cdot k\} < \infty$)

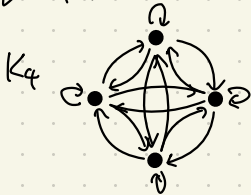
$$\mathbb{C}[(N, \times, 1)] \text{ は } \sum_{n \in \mathcal{M}_0(N)} a_n \cdot \underbrace{n}_{(N, \times, 1) \text{ の射}} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

これは形式的ディリクレ級数環と同型.

e.g.) (有限圏) ($\Leftrightarrow$ Category Algebra と一致)

有限群 G に対して $\mathbb{C}[G]$ は G の 群環 と同型

有限集合 X に対して K_X ($\text{ob } K_X = X, \forall x, y \in X, |K_X(x, y)| = 1$) の



incidence algebra は $\mathbb{C}[K_X] \cong M_{|X|}(\mathbb{C})$
行列環と同型.

有限グラフ $\mathcal{G}$ に対して $\mathcal{G}$ 上の自由圏 $F(\mathcal{G})$ は有限圏

(i.e. $\mathcal{G}$: acyclic である) $\mathbb{C}[F(\mathcal{G})]$ は $\mathcal{G}$ の path-algebra と同型

⋮

e.g.) (有限順序集合)

15/30

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 上の前順序 $\subseteq$ について.

$(X, \subseteq)$ の incidence algebra は

$$\mathbb{C}[(X, \subseteq)] \xrightarrow{\quad} M_n(\mathbb{C})$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} (x_i \rightarrow x_j) \mapsto (a_{ij})_{ij}$$

つまり $M_n(\mathbb{C})$ の 部分環 と同型 になる.

Exercise

(1) 上の対応は

$\{X \text{ の 前順序 } \} \xrightarrow{\sim} \{M_n(\mathbb{C}) \text{ の 部分環が 対角行列を含む}\}$
が 全単射 を定めることを示せ

(2) 上三角行列 かつ $M_n(\mathbb{C})$ の 部分環 $T_n(\mathbb{C}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$
に対応する X の 前順序 を 求めよ.

e.g.) 加法モノイド $(\mathbb{N}, +, 0)$ について.

$$\mathbb{C}[(\mathbb{N}, +, 0)] \cong \mathbb{C}[x]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n'' \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

は同型 //

e.g.) 順序集合 $(\mathbb{N}, \leq)$ 1, 2, 3, ...

16/30

$\mathbb{C}[(\mathbb{N}, \leq)]$ は " $\infty \times \infty$ の 上三角行列" の 可換環 である.

$$(a_{i,j})_{0 \leq i \leq j} \times (b_{i,j})_{0 \leq i \leq j} = \left(\sum_{k=i}^j a_{i,k} \cdot b_{k,j} \right)_{0 \leq i \leq j}$$

有限和

e.g.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 & \cdots \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \cdots \\ 0 & 0 & 4 & 4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 11 & 8 & \cdots \\ 0 & 0 & -4 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 4 & 5 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Exercise $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}, \geq)]$ は 可換環 か?

2.2. 一般化 X への入反転

Def ($\xi \in \mu$)

finitely finite category $\mathcal{C}$ 1, 2, 3, ...

$$\xi_{\mathcal{C}} := \sum_f f \in \mathbb{C}[\mathcal{C}]$$

と定める。

11/30

ζ_e が $\mathbb{C}[e]$ で積の逆元をもちとき、

それ $\mu_e := \zeta_e^{-1}$ と定める。

この定義が $\vdash$ には、 $\vdash$ の "thm" が得られる。

Thm (一般化 λ ビュー反転)

$\mu_e \neq 0$ 及び finite category $\mathcal{C}$ に対し、

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}[\mathcal{C}]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \beta \cdot \zeta_e \iff \alpha \cdot \mu_e = \beta \\ \alpha = \zeta_e \cdot \beta \iff \mu_e \cdot \alpha = \beta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \zeta_e \cdot \beta \iff \mu_e \cdot \alpha = \beta \end{array} \right.$$

が成立する。

(proof) μ_e の定義より、 $\zeta_e \uparrow \mu_e$ が存在するだけ。

Remark

これは μ_e の定義が正しいこと。

μ_e が計算ができれば無用なトートロジーがなくなる。

μ_e には 様々な 計算方法 が 知られている .

18/30

$$\mu_e = \sum_f \mu(f) \cdot f \quad \text{と 2 explicit に 書き下す .}$$

$$\begin{cases} \alpha = \sum a_f \cdot f \\ \beta = \sum b_f \cdot f \end{cases} \quad \text{に なる .}$$

$$\forall_f, a_f = \sum_{\substack{f \\ g \nearrow h}} b_g \iff \forall_f, b_f = \sum_{\substack{f \\ g \nearrow h}} a_g \cdot \mu(h)$$

$$\forall_f, a_f = \sum_{\substack{f \\ g \nearrow h}} b_h \iff \forall_f, b_f = \sum_{\substack{f \\ g \nearrow h}} \mu(g) \cdot a_h$$

で なる .

Σ 記号 - かん

$\sum_e \rightsquigarrow$ 総和

$\mu_e \rightsquigarrow$ 総和 の 逆操作

e.g.) $(\mathbb{N}_2, \times, 1)$ の $\times$ の逆元は.

(古典的) $\times$ の逆元

19/20

e.g.) $\mathcal{C} = (\mathbb{N}, +, 0)$ について. $\mathbb{C}[(\mathbb{N}, +, 0)] \cong \mathbb{C}[[x]]$ として

$$\begin{cases} \zeta_{\mathcal{C}} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \\ \mu_{\mathcal{C}} = 1 - x \end{cases}$$

つまり. $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \beta = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ について

$\times$ の逆元は “和差分の基本定理”

$$\forall n \quad a_n = \sum_{k=0}^n b_k \iff \forall n \quad b_n = \begin{cases} a_n - a_{n-1} & (n \geq 1) \\ a_0 & (n=0) \end{cases}$$

(総和式 (たとえば $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$) と差分と induction) 示すのは 意味では $\times$ の逆元

Exercise $\mathcal{C} = \mathbb{C}[(\mathbb{N}, +, 0)], \mathbb{C}[(\mathbb{N}_2, \times, 1)]$ について. 以下の計算をせよ

次の計算をせよ

(1) $\zeta_{\mathcal{C}}^2$ の係数を求め, 用いる等式 $\zeta_{\mathcal{C}}^2 = \zeta_{\mathcal{C}} \times \zeta_{\mathcal{C}}$ の $\times$ の逆元

$\zeta_{\mathcal{C}}^2 \times \mu_{\mathcal{C}} = \zeta_{\mathcal{C}}$ を書き下せ.

(2) 形式的微分とは “項別微分” $D: \mathbb{C}[\mathcal{C}] \longrightarrow \mathbb{C}[\mathcal{C}]$

を定義し, ライブニッツ則を満たすことを示せ

(3) (2)より得られる等式 $D(\zeta_e) \times \zeta_e = \frac{1}{2} D(\zeta_e^2)$ と (20/30)
 の $\times$ による反転 $D(\zeta_e) = \frac{1}{2} D(\zeta_e^2) \times \mu_e$ を書き下せ

Exercice (75分)

$\mathcal{A}$ を (3173バットの) 集合とする. $\mathcal{A}$ の 有限文字列の集合

$F\mathcal{A} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$ は、文字列の結合 $*$ により、空文字列 $()$

を単位元にもつモノイド $\mathcal{M} := (F\mathcal{A}, *, ())$ となる.

(1) $\mathcal{M}$ は finitely finite であることを示せ

(2) μ_e を計算せよ.

(3) $\varphi \in \mathcal{A}$ に対し, φ に関する文字列の形式和

$$\alpha = \sum_{w \in F\mathcal{A}} w * (\varphi) = \zeta_e \times \varphi \text{ の } \times \text{ による反転}$$

$$\mu_e \times \alpha = \varphi \text{ を 42-17 (2) まで}$$

e.g.) $\mathcal{C} = (N, \succeq)$ 12112.

21/30

$$\zeta_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mu_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{である.}$$

Exercise

$$(1) \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11^{\circ}\text{スカラー} \equiv \mathbb{R}\text{形})$$

$$\beta' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{左に12のライクした} 11^{\circ}\text{スカラー} \equiv \mathbb{R}\text{形})$$

とす。 $11^{\circ}\text{スカラー} \equiv \mathbb{R}\text{形}$ の漸化式 $n+1C_k = nC_k + nC_{k+1}$ は

$\beta' \cdot \mu_{\mathcal{C}} = \beta$ を意味することを確認せよ。

$$(2) \quad \beta' = \beta \zeta_{\mathcal{C}} \quad \text{を書け.}$$

Exercise

finitely finite $\&$ poset $(P, \leq)$ は $\mu_{(P, \leq)}$ を持つことを示せ

ヒント: $\mu_{(P, \leq)}(x \leq y)$ を、 $\#\{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$ 12112 帰納的に定める。

メビウス反転は加群でも可能

Prop (no 群における $\times$ の入反転)

(22/30)

$\mathcal{C}$: finely finite category $\Rightarrow \mathcal{C}$ は $\mu_c \exists \in \mathcal{C}$ となる.

このとき, $\mathcal{C}[\mathcal{C}]$ の 左(右)加群 $\mu \in \exists \alpha \pi \alpha \cdot \beta$ により

$$\zeta_c \cdot \alpha = \beta \iff \alpha = \mu_c \cdot \beta$$

$$(\alpha \cdot \zeta_c = \beta \iff \alpha = \beta \cdot \mu_c)$$

が成立する.

Remark $\mu \in \mathcal{C}$ である $\mathcal{C}[\mathcal{C}]$ $\exists \in \mathcal{C}$ と既に述べた
一般化 $\times$ の入反転.

e.g.) 包除原理

有限集合 Λ とその幂集合 $P(\Lambda)$ を考える.

順序集合 $\mathcal{C} := (P(\Lambda), \subseteq)$ の incidence algebra $\mathcal{C}[(P(\Lambda), \subseteq)]$

を考える.

$$\zeta_c = \sum_{s \subseteq s' \subseteq \Lambda} (s \subseteq s') \quad , \quad \mu_c = \sum_{s \subseteq s' \subseteq \Lambda} (-1)^{|s'| - |s|} \cdot (s \subseteq s')$$

射の符号

Exercise (直積圏の $\times$ の入反転)

(1) finely finite category $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ により

$c_1 \times \dots \times c_n \neq$ freely finite $\forall c \in S$ (23/30)

(2) (1) により $c_1, \dots, c_n$ は χ の関数 $\mu_{c_1}, \dots, \mu_{c_n}$

で表わす. $c_1 \times \dots \times c_n \neq \chi$ の関数 $z \in S$,

$$\mu_{c_1 \times \dots \times c_n}(f_1, \dots, f_n) = \mu_{c_1}(f_1) \times \dots \times \mu_{c_n}(f_n)$$

で与えられることを示す

(3) $(P(\Lambda), \leq) \cong (\{0, 1\}^{\Lambda}, \leq)^{\Lambda}$ により $P(\Lambda)$ の χ の関数
関数を計算せよ.

$\mathbb{C}[(P(\Lambda), \leq)]$ は $\mathbb{C}^{P(\Lambda)}$ を左加群に持つ

$$\left(\begin{array}{l} S \subseteq \Lambda \text{ と } S_0 \subseteq S_1 \subseteq \Lambda \text{ により} \\ (S_0 \subseteq S_1) * S := \begin{cases} S_0 & (S = S_1) \\ 0 & (\text{other}) \end{cases} \text{ により} \end{array} \right)$$

により χ の関数 χ の関数は、以下で表す.

$$\forall F, G: P(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\forall S \subseteq \Lambda, F(S) = \sum_{S \subseteq S'} G(S')) \quad \leftarrow \text{Subset により の 総和}$$

$$\Leftrightarrow (\forall S \subseteq \Lambda, G(S) = \sum_{S \subseteq S'} (-1)^{|S' \setminus S|} \cdot F(S')) \quad \leftarrow \text{包含原理}$$

$P(\Lambda)$ の χ の関数 χ の関数は、次のように 包含原理 を含む。

有限集合 X と Λ の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について. (24/30)

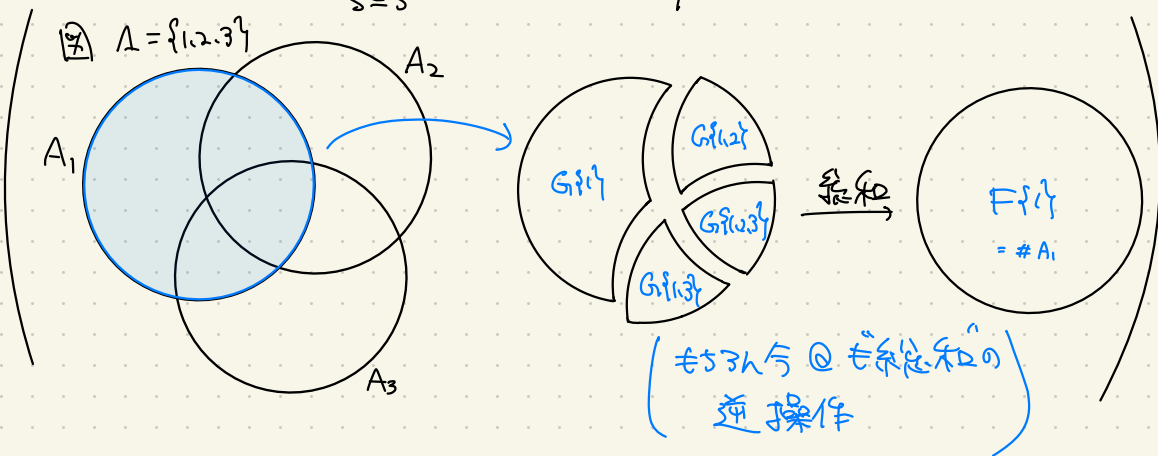
$$\begin{array}{ccc} \text{Ind} : X & \longrightarrow & \mathcal{P}(\Lambda) \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \{\lambda \in \Lambda \mid x \in A_\lambda\} \end{array} \quad (x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \text{ index 集合})$$

と可. $\cap$ のとき,

$$F(S) := \left| \bigcap_{\lambda \in S} A_\lambda \right| = \left(\bigcap_{\lambda \in S} A_\lambda \right) \cap \left(\bigcap_{\lambda \in S^c} A_\lambda^c \right)$$

$$G(S) := \left| \text{Ind}^{-1}(S) \right|$$

と可. $F(S) = \sum_{S \subseteq S'} G(S')$ 7 easy.



X の入反転可と, $\epsilon < 1$

$$G(\phi) = \sum_{S \subseteq \Lambda} (-1)^{|S|} \cdot F(S), \quad \text{つまり}$$

$$|X| - \left| \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right| = \sum_{S \subseteq \Lambda} (-1)^{|S|} \left| \bigcap_{\lambda \in S} A_\lambda \right| \quad \text{が得られる.}$$

$$\text{移項すれば } \left| \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right| = \sum_{\phi \neq S \subseteq \Lambda} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{\lambda \in S} A_\lambda \right| \quad \text{が得られる.}$$

Exercise 同様のやり方反転で,

25/30

有限測度空間 X とその部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: 一般化せよ.

e.g.) derangement (完全順列)

Δ_{inj} は、非負整数を object にとり、 n から m への射は

$\{1, 2, \dots, n\}$ から $\{1, 2, \dots, m\}$ への順序を保つ単射がある.

射 $n \longrightarrow m$ は m 元集合の n 元部分集合と対応する.

($P(\Lambda)$ とは 違) 視点から) 有限集合の部分集合に渡る

総和の話からできる.

$f: n \longrightarrow m \in \text{Mor}(\Delta_{inj})$ により,

$$\mu_{\Delta_{inj}}(f) = (-1)^{m-n} \text{ である.}$$

$\mathbb{C}[\Delta_{inj}]$ は $\mathbb{C}^N$ を右加群にとり,

$$\left((x_n)_{n=0}^{\infty} * \sum_f a_f \cdot (f: n \rightarrow m) := \left(\sum_{k=0}^n \sum_{f: k \rightarrow n} x_k \right)_{n=0}^{\infty} \right)$$

射は右、2
数にわたる.

$$(x_n)_{n=0}^{\infty} \cdot \sum_{\Delta_{inj}} = \left(\sum_{k=0}^n |\Delta_{inj}(k, n)| \cdot x_k \right)_{n=0}^{\infty}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n n C_k \cdot x_k \right)_{n=0}^{\infty}$$

$$\begin{aligned}
 (x_n)_{n=0}^{\infty} \cdot \mu_{\Delta_{\text{inj}}} &= \left(\sum_{k=0}^n |\Delta_{\text{inj}}(k, n)| \cdot (-1)^{n-k} x_n \right)_{n=0}^{\infty} \quad \left(\frac{26}{20} \right) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot n C_k \cdot x_n \right)_{n=0}^{\infty}
 \end{aligned}$$

2つある. $\Rightarrow$ 加法群の $\times$ について 反転は

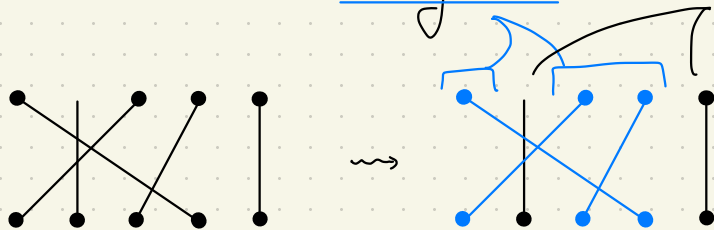
$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\sum_{k=0}^n n C_k \cdot a_k \right)_{n=0}^{\infty}$$

$$\Leftrightarrow (a_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} n C_k \cdot a_k \right)_{n=0}^{\infty}$$

2つある.

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は、不動点を持たないとき derangement といふ。

任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は、derangement と 恒等部分 に分けられることに



注目すると、derangement $= n \longrightarrow n$ の個数 $\geq d_n$ といふ。

$$(d_n)_{n=0}^{\infty} \times \mu_{\Delta_{\text{inj}}} = (|\mathfrak{S}_n|)_{n=0}^{\infty} = (n!)_{n=0}^{\infty} \text{ といふ。}$$

“部分集合としての derangement の数の総和は $|\mathfrak{S}_n|$ ”

あと、 $\times$ について 反転 可能。

$$(d_n)_{n=0}^{\infty} = (n!)_{n=0}^{\infty} \times \mu_{\Delta_{\mathbb{N}}}$$

♫ 得3知3

21/30

♫ 下可也.

$$d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot n C_k \cdot k!$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

(即足: $\frac{d_n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}$)

§3. 発展的内容 につがる具体例

3.1. (coarse) incidence algebra.

加群の $\times$ による反転の例として挙げた $P(\Delta)$, Δ_{inj} への例は、より適切な (必要な情報を落とした)

$\times$ による反転が存在する。

Δ_{inj} の例では、 $\mu_{\Delta_{inj}}$ より、" $\infty \times \infty$ 行列"

$$\tilde{\gamma}_{\Delta_{inj}} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = (\delta_{ij} C_i)_{0 \leq i \leq j} \quad \text{と}$$

$$\mu_{\Delta_{inj}} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -2 & 3 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = ((-1)^{j+i} \delta_{ij} C_i)_{0 \leq i \leq j}$$

が重要な役割を果たしている。

これは coarse Möbius function と呼ばれている。

$\Delta_{inj} \longrightarrow (N, \geq)$ なる関手に関連する

$$\begin{array}{ccc} n & & n \\ \downarrow f & \longmapsto & 1 \\ m & & m \end{array}$$

$\mathbb{C}$ 代数準同形

$$\mathbb{C}[\Delta_{inj}] \longrightarrow \mathbb{C}[(N, \geq)]$$

における $\gamma_{\Delta_{inj}}, \mu_{\Delta_{inj}}$ の像である。

詳しくは Tom Leinster の

29/30

「Notions of Möbius inversion」

を読むといい。

3.2. 圏のオイラー標数

有限圏 $\mathcal{C}$ が $\mu_c = \sum_f \mu(f) \cdot f \in \mathbb{C}[\mu_c]$ をもつとき,

$\mathcal{C}$ の係数環 $\chi(\mathcal{C}) := \sum_f \mu(f)$ を $\mathcal{C}$ のオイラー標数
という。(本当はもっと広く定義されている)

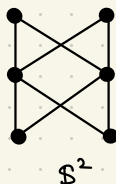
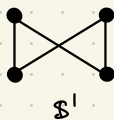
詳しくは Tom Leinster の

「The Euler characteristic of a category」を見るといい。

雰囲気を感じ取る Exercise を置いておく。

Exercise ($\mathcal{S}^n \subset \mathcal{S}^n$)

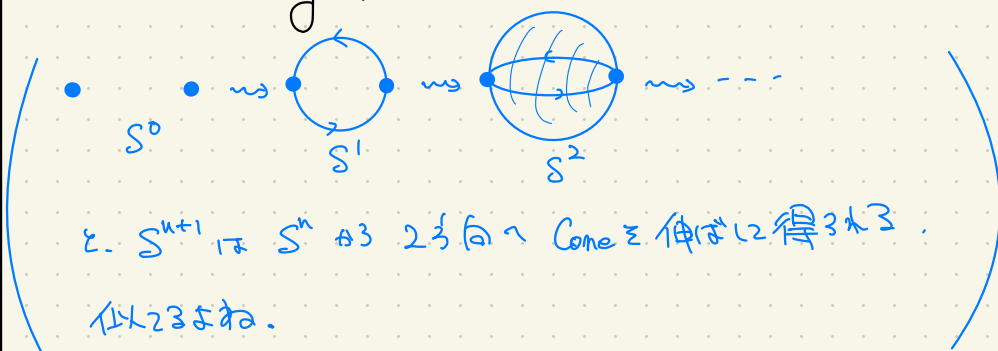
$n \geq 0$ に対し、圏 $\mathcal{S}^n$ を、



...

なる Hasse diagram を作る順序集合とする.

30/30



$$\chi(S^n) = \chi(S^n) \quad \text{を示せ.}$$

図のオイラー標数 位相空間のオイラー標数

これは偶然ではなく、あらゆる n の図と一致する。

$\chi(C)$ と C の "characteristic space" のオイラー標数が一致することが知られている。

参考文献

Q 圏(完全概念)のゼータ

• Andrew Robin : A Primer on Zeta Functions

and Decomposition Spaces

(他にゼータ)

• N. Kurokawa : Zeta functions of categories

• Kazumori Noguchi : The zeta function of a finite category

Q ムビウス反転

• Gian-Carlo Rota : On the Foundations of Combinatorial

Theory I. Theory of Möbius Functions

• Tom Leinster : Notions of Möbius Inversion

Q 木-標数 (圏の濃度)

• Tom Leinster : The Euler characteristic

of a category

(関連: 濃度 --- Groupoid Cardinality)

• John C. Baez and James Dolan : From Finite Sets to Feynman Diagrams.

• Terence Tao の "Counting objects up to isomorphism: groupoid cardinality."