

1 線形代数におけるトレースと不動点

§1.1 線形代数のトレースの復習.

§1.2 トレースの基底における記述

§1.3 線形代数におけるトレースと不動点

2 String diagram と dual object

§2.1. String diagram の復習.

§2.2 dual object の定義と例

3 Trace in Symmetric Monoidal Category

§3.1 トレースの定義と例

§3.2. trace の性質の“視覚的”証明

4 トレースと不動点

§4.1 twisted trace

§4.2 トレースと不動点.

5 私がまだ理解していない

Appendix weak dual との関係

□ 線形代数におけるトレースと不動点

§1.1 線形代数のトレースの復習.

① 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ のトレース $\text{tr}(A)$

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad \text{と定義する。}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{tr} 3 + 5 + 5 = 13$$

② トレースには 3重線形性, つまり $A \in M_{n,m}(K), B \in M_{m,n}(K)$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \text{が成立する。}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{一般に } \text{tr}(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n) = \text{tr}(A_n A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \\ \text{が分かる。} \end{array} \right)$$

よって, $n < 12$, 基底 a_i により tr 可

有限次元線形空間の自己射により定まる量

と表すことが分かる。

§1.2 トレースの基底における記述

k 上有限次元線形空間 V の自己射 $f: V \longrightarrow V$ のトレースは、次のように基底における記述できる。

まず, V : 有限次元 かつ 自然な同型

$$V \otimes V^* \cong \text{Vect}_k(V, V) \text{ が存在する。}$$

すなわち, $\text{id}_V \in \text{Vect}_k(V, V)$ に対応する元 $\eta \in V \otimes V^*$ が存在する。上の行を矢が η に対応 $k \xrightarrow{[\eta]} V \otimes V^* \xrightarrow{\text{id}}$

$$\begin{array}{ccc} k & & \\ \downarrow [\eta] & & \\ V \otimes V^* & & \\ \downarrow f \otimes \text{id}_{V^*} & \text{は } \text{tr}(f) \text{ 倍写像。} & \\ V \otimes V^* & & \\ \downarrow \text{evaluation} & & \\ k & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} V \text{ の基底 } \{e_i\} \quad i=1, \dots, n \\ \text{双対基底 } \{f_i\} \quad i=1, \dots, n \\ \downarrow \\ \sum_i e_i \otimes f_i \\ \downarrow \\ \sum_i f_i(f(e_i)) \otimes f_i \\ \downarrow \\ \sum_i f_i(f(e_i)) = \text{tr}(f) \end{array}$$

§1.3 線形代数におけるトレースと不動点

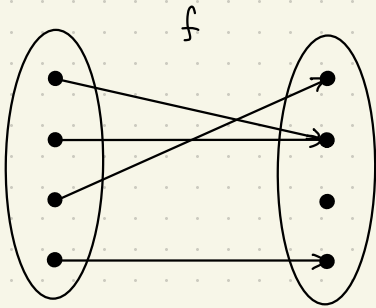
有限集合 X と 自己写像 $f: X \longrightarrow X$ について,

free vector space functor $\mathbb{C} -: \text{Set} \longrightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}$

induce する map $\mathbb{C}f: \mathbb{C}X \longrightarrow \mathbb{C}X$

の trace は f の不動点の個数に等しい。

$$\text{tr}(\mathbb{C}f) = \# \{ f \text{ の不動点} \}$$



$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remark (コーシー・フロベニウス)

有限群 G の有限集合 X への作用 $G \curvearrowright X$ が与えられ、

置換表現 $G \xrightarrow{\sigma} \text{Aut}_{\text{Vect}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{C}X)$ が得られる。

$G \curvearrowright \mathbb{C}X$ への不動点集合 (自明表現部分) への

射影 $\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g)$ をとれると、

$$\#X/G = \dim_{\mathbb{C}} (\text{Set}(X, \mathbb{C}))^G = \dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}X)^G$$

$$= \text{tr}(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(\sigma(g)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \# \{g \text{ の不動点} \}$$

(対称性を考慮した数え上げに便利)

2 String diagram と dual object

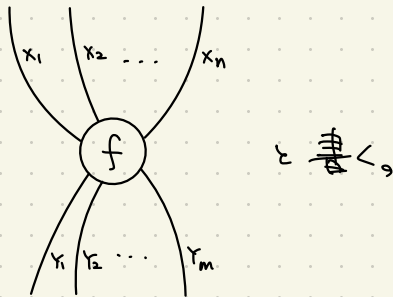
§ 2.1. String diagram の復習.

monoidal category $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda)$ について.

① object X は $\begin{array}{|c} \hline X \\ \hline \end{array}$ と線で書き,

② $X \otimes Y$ は $\begin{array}{|c|c} \hline X & Y \\ \hline \end{array}$ と線の並列で書き,

③ morphism $X_1 \otimes \dots \otimes X_n \xrightarrow{f} Y_1 \otimes \dots \otimes Y_m$ は



④ 自然の略記. $\dots$ I は何も書かぬで表す.

id_X は $\begin{array}{|c} \hline X \\ \hline \end{array}$ と書き, 射を明記しない。

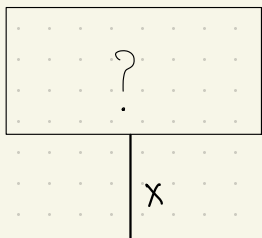
e.g.) I の n 個は " π " と呼ばれ 2 種類ある。

- Cartesian Category --- Set, Cat, Top, Shx, ...

これは global element あり

- $R\text{-Mod} \in \otimes$ --- π

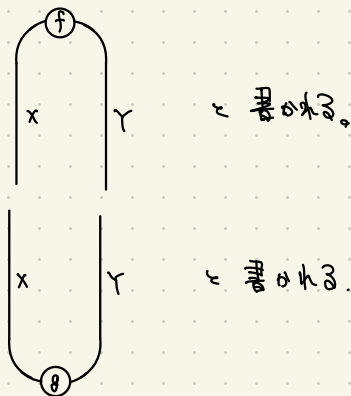
- $\text{Chp} \in \otimes$ --- 0 は 1 個の π .



が π .

e.g.) $I \xrightarrow{f} X \otimes Y$ は

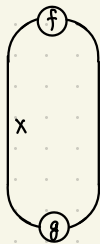
$X \otimes Y \xrightarrow{g} I$ は



eg.) I は I の 射は スカラ - とみせろ ことがある。

• R -Mod. $\text{Chr} \dots R$ の元.

• $\text{Rel} \subset$ 集合 $\times$ 集合の直積 $\dots$ 真偽値



など、以下に "開いた" string として書かれています。

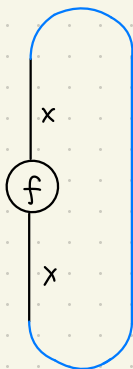
§ 2.2 dual object の定義と例

Q



から スカラーを取出す自然な方法は何か?
 i.e. Tr をとる。

曲が2
開く。
~~~~~>



string は曲が2向きを区別して考える。

- 且, string 2" 2" Notation 2" Def 73.

Def (dual object)

monoidal category  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, I, \otimes, \alpha, \rho, \lambda)$  中

object  $M (\downarrow M)$  的 dual 是,

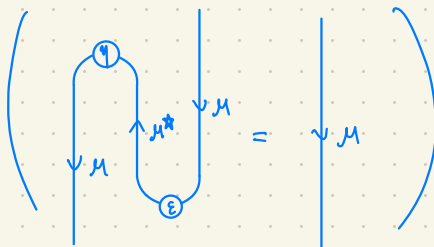
object  $M^* (\uparrow M^*)$  且

$$\begin{cases} \text{unit: } I \xrightarrow{\eta} M \otimes M^* \\ \text{counit: } M^* \otimes M \xrightarrow{\varepsilon} I \end{cases}$$



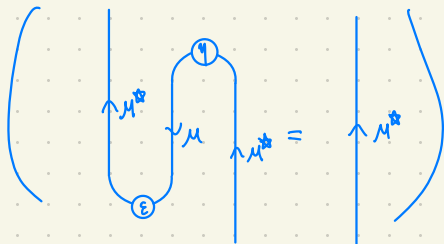
且  $(M, M^*, \eta, \varepsilon)$  满足 2. triangle identity

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & M \otimes M^* \otimes M \\ & \searrow 1 & \downarrow 1 \otimes \varepsilon \\ & & M \end{array}$$



Snake diagram

$$\begin{array}{ccc} M^* & \xrightarrow{1 \otimes \eta} & M^* \otimes M \otimes M^* \\ & \searrow & \downarrow \varepsilon \otimes 1 \\ & & M^* \end{array}$$



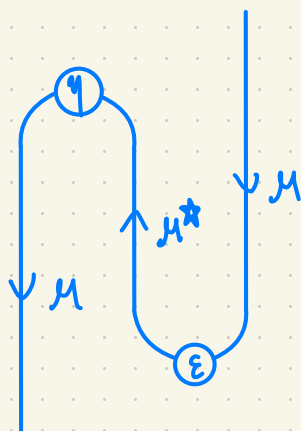
2" 2" 2" 2"

e.g.)  $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$  において. dual  $\varepsilon$  と  $\eta$  は 有限次元  $V$  に対して 同値. dual は  $V^* : \text{双対空間}$  であり.

$\eta: \mathbb{K} \longrightarrow V \otimes V^*$  は  $\text{id}_V: V \longrightarrow V$  に対応する元  $\varepsilon$  である.

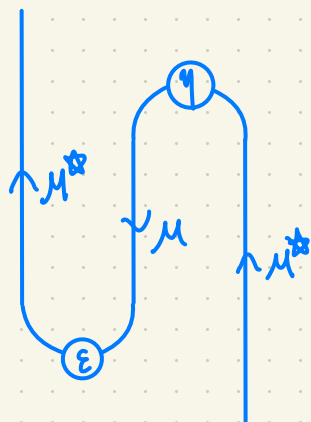
$\varepsilon: V^* \otimes V \longrightarrow \mathbb{K}$  は evaluation.

基底  $\{e_i\}$ . 双対基底  $\{f_i\}$  である.



$$\sum_{i=1}^{\dim V} e_i \otimes f_i \otimes v$$

$$\sum_{i=1}^{\dim V} f_i(v) \cdot e_i = v \quad (\text{基底表示})$$



$$p: V \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\sum_{i=1}^{\dim V} f \otimes e_i \otimes f_i$$

$$\sum_{i=1}^{\dim V} f(e_i) \cdot f_i = f$$

e.g.)  $R = \mathbb{C}[x, y]$  12052.  $M = R\text{-Mod}$  の dual  $\cong \mathbb{C}$  12

finitely generated projective module  $\cong \mathbb{C}$

同値。 (see: Appendix)

dual は  $R\text{-Mod}(M, R)$

Remark (双対 dual)

$\mathbb{C}[x, y]$  の  $M$  12052. 双対 dual.

$M^* := R\text{-Mod}(M, R) \cong \mathbb{C}$ . coevaluation  $\cong \mathbb{C}$ ,

実は  $\cong \mathbb{C}$  双対 dual だ！ 良！性質  $\cong \mathbb{C}$ .

dual は 双対 dual  $\cong$  一致可。 (see: Appendix)

e.g.)  $k: \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$ ,  $\text{Ch}_k \cong \pi(X_\bullet, \partial_\bullet)$  dual  $\cong \pi \circ \iota$

は,  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \dim(X_n) < +\infty$  ならば同値。

dual は  $(X_\bullet^*, (-1) \cdot \partial_\bullet^*)$

$k$  である  $R$  である。 dual がある。  
finger 2: 各次数  $n$  に対して projective である。  
計算して、残りはある。

e.g.) Cartesian Monoidal Category の object  $0$   
dual  $\cong 0$  である, terminal であると同値。

(つまり、そのままだけで残る。) )

e.g.)  $\mathcal{C}$ : category について,  $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$  と合成はする

monoidal category  $\mathcal{Z}''$  は.

$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$  が dual  $\mathcal{Z}''$  の  $\mathcal{C}$  は

left adjoint  $\mathcal{Z}''$  の  $\mathcal{C}$  と同値,

dual は left adjoint  $\mathcal{Z}''$ , unit, counit は  
adjoint の unit, counit.

(  $\mathcal{Z}''$  の  $\mathcal{C}$  は, dual は 本来 bicategory  $\mathcal{Z}''$   
考えなきゃだ という  $\mathcal{Z}''$  を示唆する. )

e.g.)  $\mathbf{Rel}$  は、集合の直積の monoidal 圏

1元集合  $*$  が単位元。

集合  $X$  は必ず自身を dual に持つ。

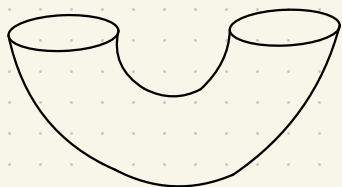
$$\mathrm{unit} : * \longrightarrow X \times X$$

$$\mathrm{counit} : X \times X \longrightarrow *$$

は共に対象系に

定まる。

e.g.)  $n\mathrm{Cob}$  にも可逆の object は自身を dual に持つ。



:  $\mathrm{counit}$



:  $\mathrm{unit}$

---

私の理解 (2つある) ...  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Sp} : \text{category of spectra} \\ \mathbf{Ho}(\mathbf{Ch}_R) : \text{derived category} \end{array} \right.$

## § 2.3 dual object の 基本性質.

string diagram の練習も兼ねて.

4エッジが閉じるまで 4エッジがある.

$M$  と  $M^*$  としての操作の一意性と  
射の対応を見る.

Lemma (dual object の一意性)

monoidal category の object  $M$  の dual  $M^*$  として

$(M, M^*, \eta, \epsilon)$

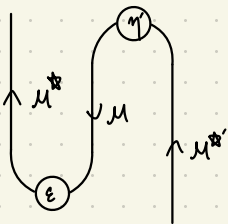
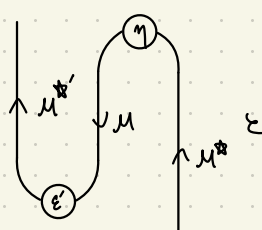
$(M, M^*, \eta', \epsilon')$  があるとすると,

$\eta, \eta', \epsilon, \epsilon'$  は整合的かつ同型  $M^* \cong M'^*$  である.

unique に存在する.

(結果として, dual は up to iso の definition として使われる.  
一般に up to iso ではないが, uniqueness は not a proof)

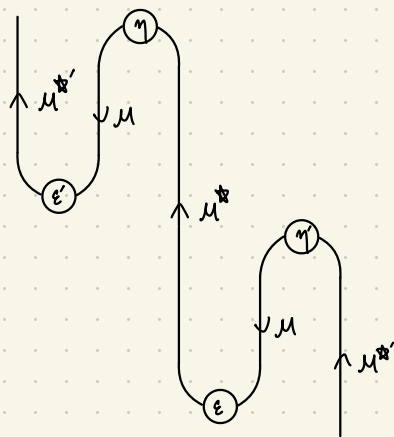
(proof)



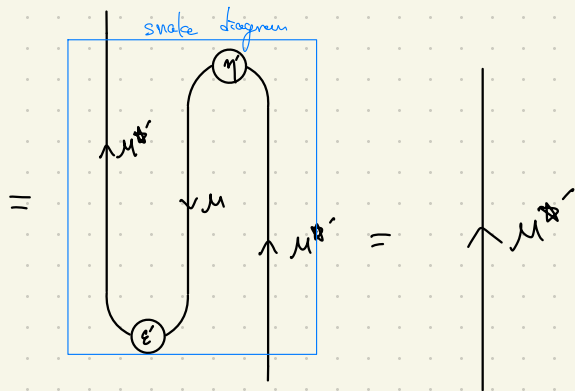
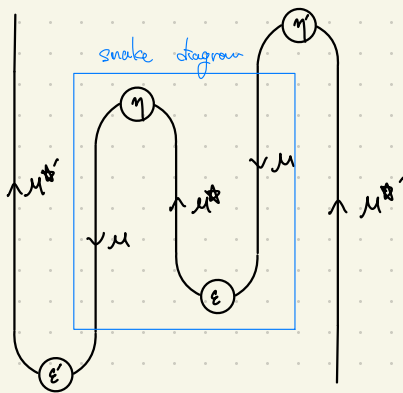
この図の逆図で、  
これは右の12番になる。

2つのdiagram "Z" "L" がある

逆図になる (3番目)



=



=

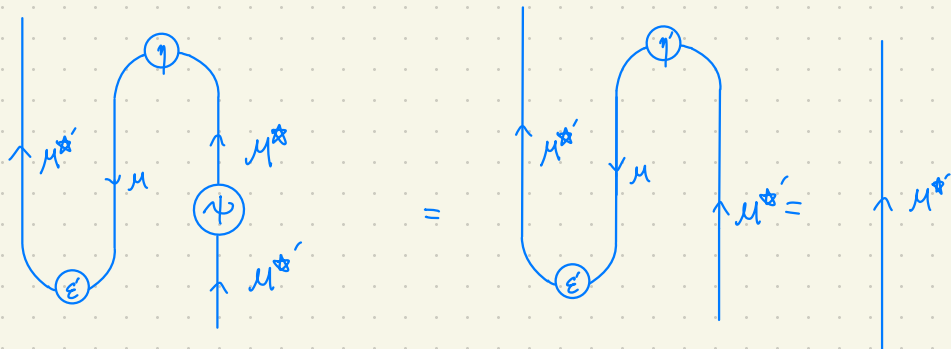
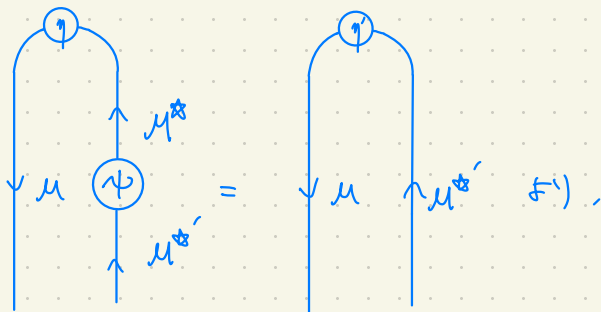


uniqueness

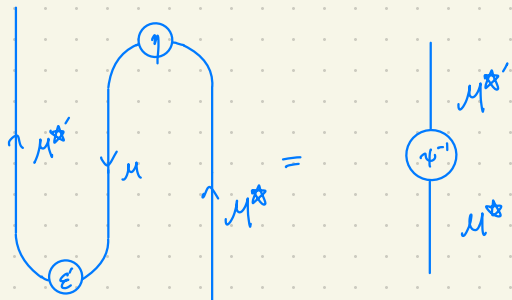
$\Xi$  のような ISO



“存在証明”

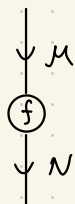


5.2.

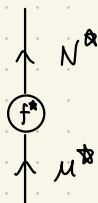


# Lemma (Frobenius dual)

monoidal category  $\mathcal{C}$  a dualizable object  $M, N \in \mathcal{C}$



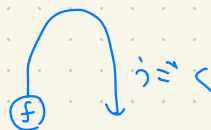
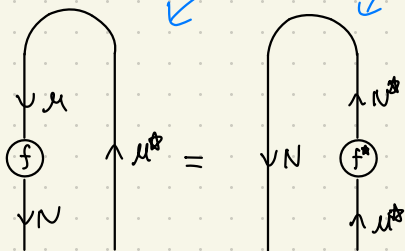
$\mu \in \mathcal{C}(M \otimes N, I)$



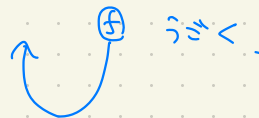
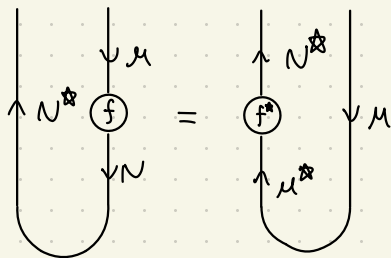
$\mu^* \in \mathcal{C}(I, M \otimes N)$

$$\eta_M \cdot \eta_N \in \mathcal{C}(I, M \otimes N)$$

(i)



(ii)

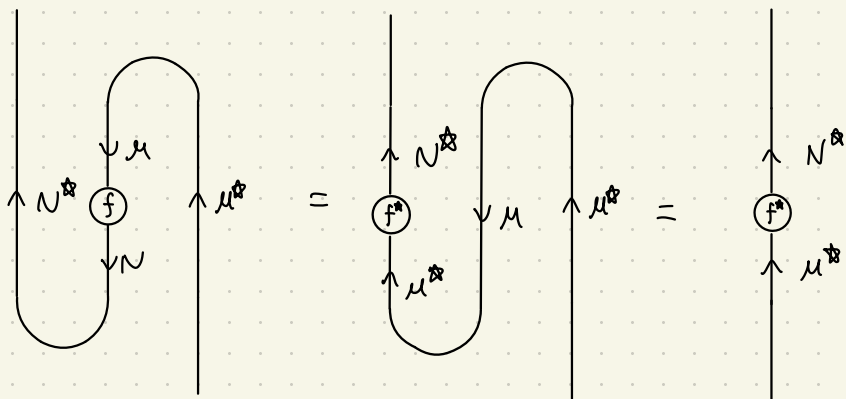


$\mu$  and  $\mu^*$  unique 存在する.

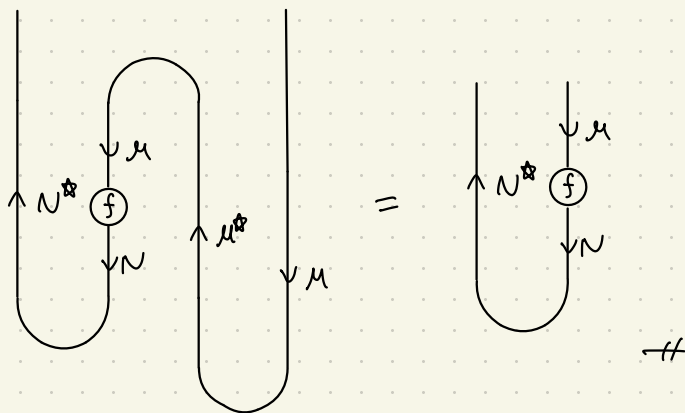
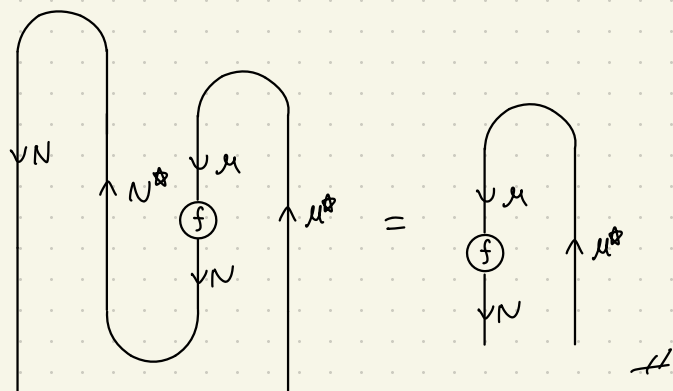
(  $[-, I]$  is internal hom functor )  
対応する, 参考は Appendix

(proof)

(uniqueness) 存在可換性,



(existence)

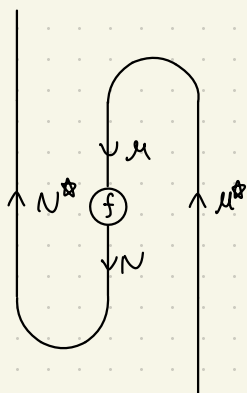


□

こるいおもちえ想像可とい。



e.g.)  $f: M \longrightarrow N$  in  $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$  2"3.



$$g: N \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\dim M} g \otimes e_i \otimes f_i$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\dim M} g \otimes f(e_i) \otimes f_i$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\dim M} g(f(e_i)) \cdot f_i = gf = f^*(g)$$

Ex.  $f^*: N^* \longrightarrow M^*$  (precomposition)

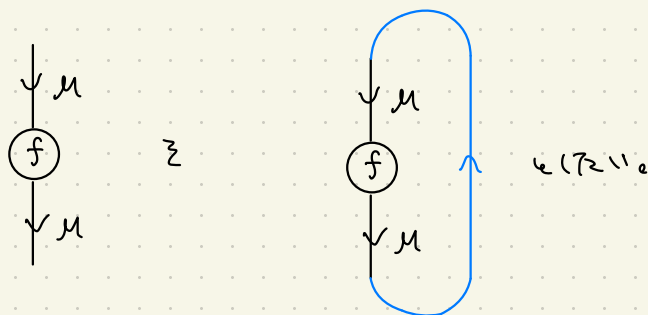
$$\hookrightarrow \text{2"3.}$$

# [3] Trace in Symmetric Monoidal Category

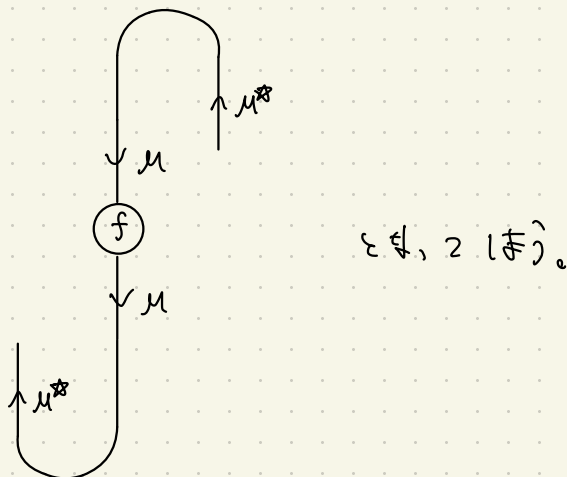
§ 3.1  $\text{Tr}$  の定義と例

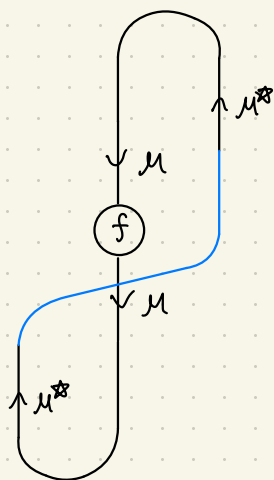
Monoidal Category の dualizable object  $M$  へ

自己射  $f: M \longrightarrow M$  に関する



$f = f^{**}$ , 曲がりの向きが逆





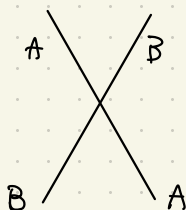
とすると  $\otimes$  は, string の 交差 ができる

monoidal 圏 で 考える 必要がある.

$A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$  に対して



と書く代わりに 略記する.

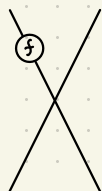


射  $\gamma_{A,B}: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$  が 与えられる.

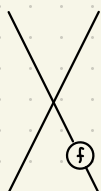
いくつかの 公理 を 満たすもの

Symmetric monoidal Category である.

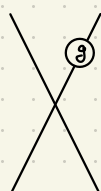
公理 の 1 つ は. Naturality



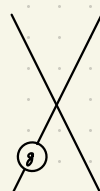
=



,



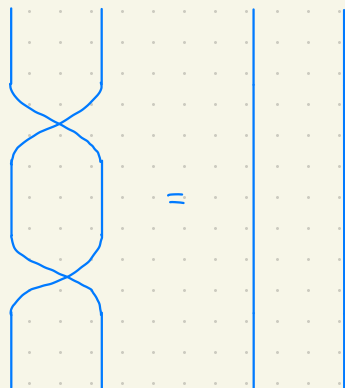
=



が 成り立つ.

## Rank

Symmetric Monoidal Category といふ



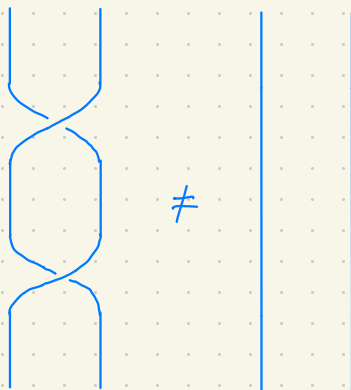
=

と公理で記述されている。

これが Braided Monoidal Category といふのは



と書かれるが  $S_0$



$\neq$

と記述される。(結び目と関係)

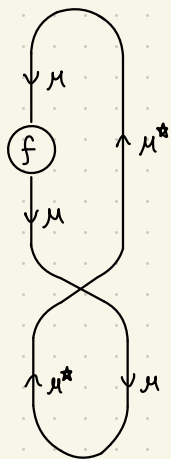
Def (trace in Symmetric Monoidal Category)

$$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda, \gamma)$$

: Symmetric Monoidal Category

dualizable object  $M \subset \mathcal{C}$  自己射

$$f: M \longrightarrow M \text{ なる } \mathcal{C} \text{ の trace } \text{tr}(f) \in$$



2-次元図。

object には  $\mu$  を 量 の 定 義 。

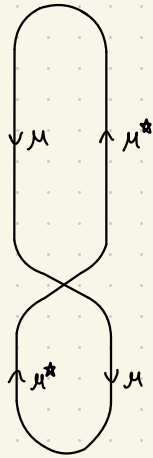
Def ( Euler Characteristic )

$$\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda, \gamma)$$

: Symmetric Monoidal Category の

dualizable object  $M$  の Euler Characteristic である。

$\text{id}_M$  の  $\text{tr}$  -  $\lambda$

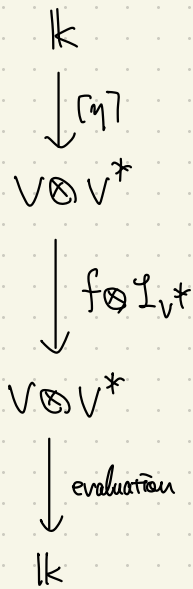


の  $\text{tr}$  である。

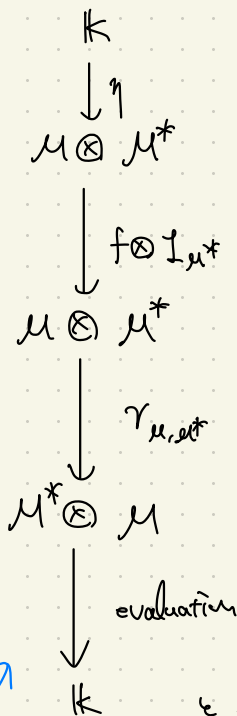
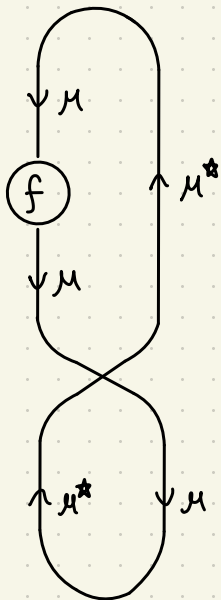
各箭の正当化は後の例で可。

e.g.)  $\text{Vect}_K = \text{おい}$

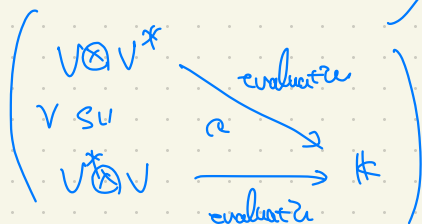
§1.2 の基底に基づいたトレースの記述



if,



$\epsilon - \text{tensor}$



Euler Characteristic if  $\sim$ 次元 (in  $K$ )

e.g.)  $Ch_{\mathbb{K}}$  におい、

$f: X \longrightarrow X$  の トレース は

= 次元  $n$  の トレースの 交代和 (シグニエツツ 数)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{tr}(f_n: X_n \longrightarrow X_n)$$

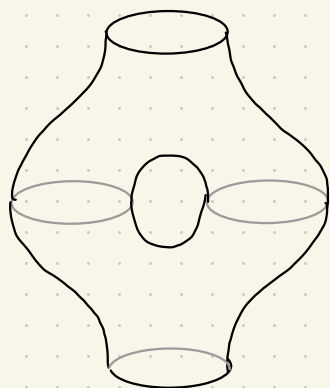
$\chi < 12$ . Euler Characteristic は Euler Characteristic.

e.g.)  $Rel$  におい、  $R: X \longrightarrow X$  の トレース  
(真偽値) は 「 $\exists x \in X, x R x$ 」 である。

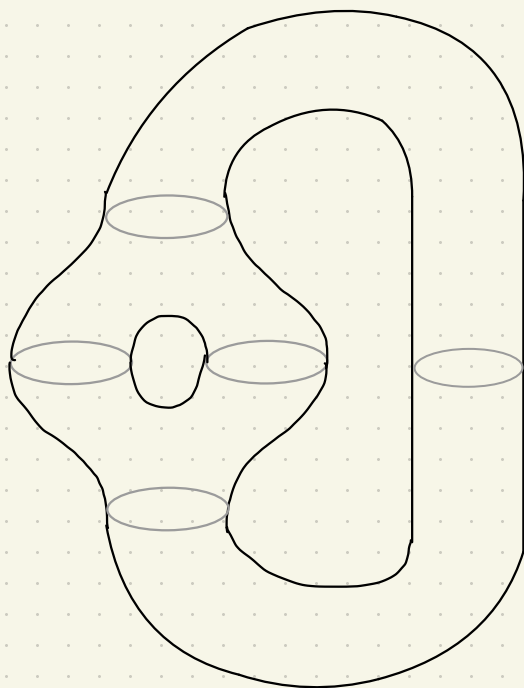
$\chi < 12$ .  $\ell: Set \longrightarrow Rel$  を 考える。

$\operatorname{tr}(\ell(f)) =$  「 $f$  は 不動点 を もつ」 である。

e.g.) in Cob 2"12.



$\rightsquigarrow$



$M$  n Euler Characteristic is  $M \times S^1$

### § 3.2. trace の性質の“視覚的”証明

string diagram というのはトレースは

ひも<sup>4</sup>の両端をつまぐ<sup>5</sup>ニセに対応してゐる。

トレースの3回性は<sup>6</sup>この真論<sup>7</sup>が正しいと思へる。

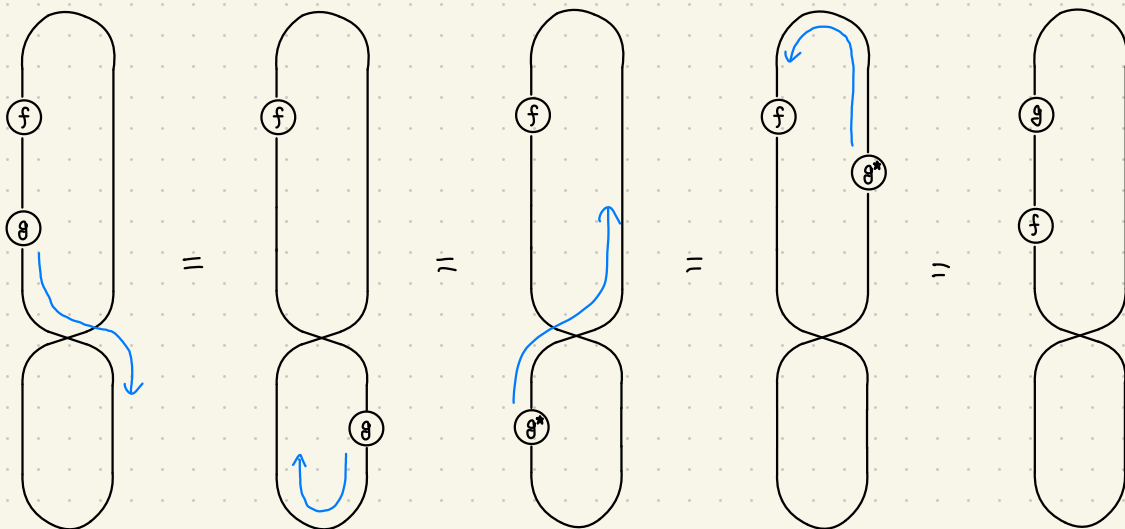
# Prop (Cyclicity of trace)

$$f: M \longrightarrow N, \quad g: N \longrightarrow M \quad \text{in } \mathcal{C}$$

Symmetric Monoidal Category a dualizable object

$$\text{Propn 1.3.3. } \text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(g \circ f)$$

(proof)

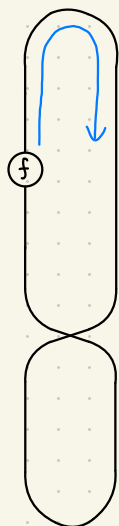


11

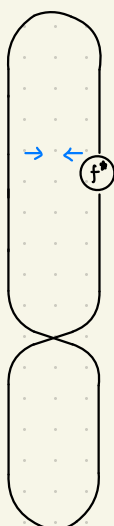
他に  $\in$ ,

$$\text{tr}(f) = \text{tr}(f^*)$$

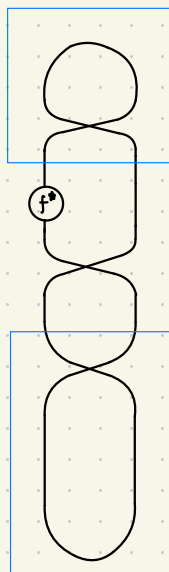
$$\left( \text{tr} A = \text{tr}^t A \right) \text{ は}$$



=



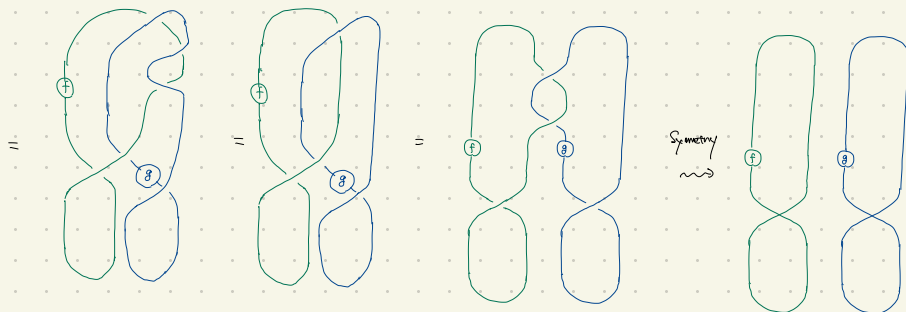
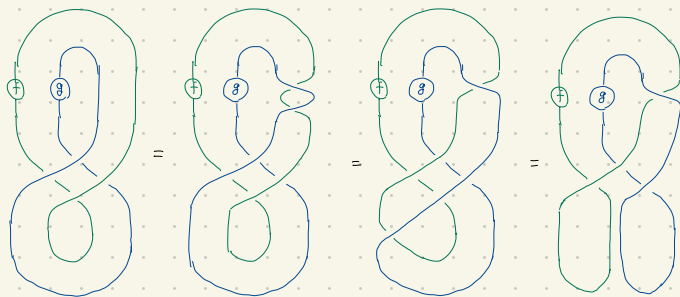
=



unit for  $\mathcal{M}^*$

count for  $\mathcal{M}^*$

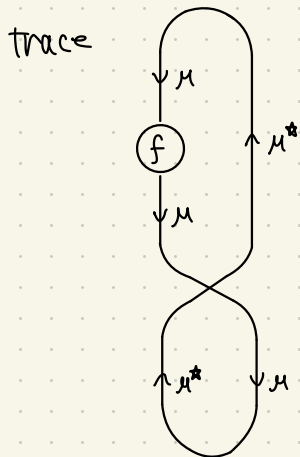
$$\text{tr}(f \otimes g) = \text{tr}(f) \otimes \text{tr}(g) = \text{tr}(f) \circ \text{tr}(g) \quad \text{は}$$



と示せる。

④ トレ-スと不動点

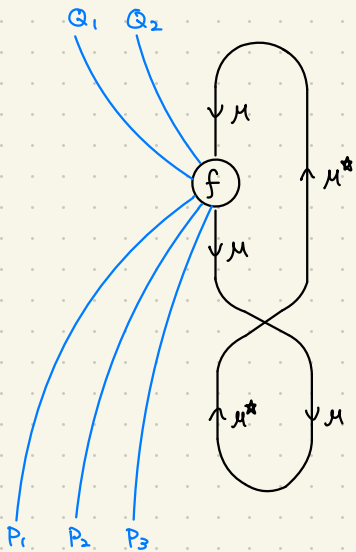
## § 4.1 twisted trace



の左側には空、2、3、

≈ 12 射 3 173 ≈ 2"

7-92 6.4 7.1 7.2 7.3 7.4 7.5 7.6 7.7 7.8 7.9 7.10 7.11 7.12 7.13 7.14 7.15 7.16 7.17 7.18 7.19 7.20 7.21 7.22 7.23 7.24 7.25 7.26 7.27 7.28 7.29 7.30 7.31 7.32 7.33 7.34 7.35 7.36 7.37 7.38 7.39 7.40 7.41 7.42 7.43 7.44 7.45 7.46 7.47 7.48 7.49 7.50 7.51 7.52 7.53 7.54 7.55 7.56 7.57 7.58 7.59 7.60 7.61 7.62 7.63 7.64 7.65 7.66 7.67 7.68 7.69 7.70 7.71 7.72 7.73 7.74 7.75 7.76 7.77 7.78 7.79 7.80 7.81 7.82 7.83 7.84 7.85 7.86 7.87 7.88 7.89 7.90 7.91 7.92 7.93 7.94 7.95 7.96 7.97 7.98 7.99 8.00 8.01 8.02 8.03 8.04 8.05 8.06 8.07 8.08 8.09 8.10 8.11 8.12 8.13 8.14 8.15 8.16 8.17 8.18 8.19 8.20 8.21 8.22 8.23 8.24 8.25 8.26 8.27 8.28 8.29 8.30 8.31 8.32 8.33 8.34 8.35 8.36 8.37 8.38 8.39 8.40 8.41 8.42 8.43 8.44 8.45 8.46 8.47 8.48 8.49 8.50 8.51 8.52 8.53 8.54 8.55 8.56 8.57 8.58 8.59 8.60 8.61 8.62 8.63 8.64 8.65 8.66 8.67 8.68 8.69 8.70 8.71 8.72 8.73 8.74 8.75 8.76 8.77 8.78 8.79 8.80 8.81 8.82 8.83 8.84 8.85 8.86 8.87 8.88 8.89 8.90 8.91 8.92 8.93 8.94 8.95 8.96 8.97 8.98 8.99 9.00 9.01 9.02 9.03 9.04 9.05 9.06 9.07 9.08 9.09 9.10 9.11 9.12 9.13 9.14 9.15 9.16 9.17 9.18 9.19 9.20 9.21 9.22 9.23 9.24 9.25 9.26 9.27 9.28 9.29 9.30 9.31 9.32 9.33 9.34 9.35 9.36 9.37 9.38 9.39 9.40 9.41 9.42 9.43 9.44 9.45 9.46 9.47 9.48 9.49 9.50 9.51 9.52 9.53 9.54 9.55 9.56 9.57 9.58 9.59 9.60 9.61 9.62 9.63 9.64 9.65 9.66 9.67 9.68 9.69 9.70 9.71 9.72 9.73 9.74 9.75 9.76 9.77 9.78 9.79 9.80 9.81 9.82 9.83 9.84 9.85 9.86 9.87 9.88 9.89 9.90 9.91 9.92 9.93 9.94 9.95 9.96 9.97 9.98 9.99 10.00 10.01 10.02 10.03 10.04 10.05 10.06 10.07 10.08 10.09 10.10 10.11 10.12 10.13 10.14 10.15 10.16 10.17 10.18 10.19 10.20 10.21 10.22 10.23 10.24 10.25 10.26 10.27 10.28 10.29 10.30 10.31 10.32 10.33 10.34 10.35 10.36 10.37 10.38 10.39 10.40 10.41 10.42 10.43 10.44 10.45 10.46 10.47 10.48 10.49 10.50 10.51 10.52 10.53 10.54 10.55 10.56 10.57 10.58 10.59 10.60 10.61 10.62 10.63 10.64 10.65 10.66 10.67 10.68 10.69 10.70 10.71 10.72 10.73 10.74 10.75 10.76 10.77 10.78 10.79 10.80 10.81 10.82 10.83 10.84 10.85 10.86 10.87 10.88 10.89 10.90 10.91 10.92 10.93 10.94 10.95 10.96 10.97 10.98 10.99 11.00 11.01 11.02 11.03 11.04 11.05 11.06 11.07 11.08 11.09 11.10 11.11 11.12 11.13 11.14 11.15 11.16 11.17 11.18 11.19 11.20 11.21 11.22 11.23 11.24 11.25 11.26 11.27 11.28 11.29 11.30 11.31 11.32 11.33 11.34 11.35 11.36 11.37 11.38 11.39 11.40 11.41 11.42 11.43 11.44 11.45 11.46 11.47 11.48 11.49 11.50 11.51 11.52 11.53 11.54 11.55 11.56 11.57 11.58 11.59 11.60 11.61 11.62 11.63 11.64 11.65 11.66 11.67 11.68 11.69 11.70 11.71 11.72 11.73 11.74 11.75 11.76 11.77 11.78 11.79 11.80 11.81 11.82 11.83 11.84 11.85 11.86 11.87 11.88 11.89 11.90 11.91 11.92 11.93 11.94 11.95 11.96 11.97 11.98 11.99 12.00 12.01 12.02 12.03 12.04 12.05 12.06 12.07 12.08 12.09 12.10 12.11 12.12 12.13 12.14 12.15 12.16 12.17 12.18 12.19 12.20 12.21 12.22 12.23 12.24 12.25 12.26 12.27 12.28 12.29 12.30 12.31 12.32 12.33 12.34 12.35 12.36 12.37 12.38 12.39 12.40 12.41 12.42 12.43 12.44 12.45 12.46 12.47 12.48 12.49 12.50 12.51 12.52 12.53 12.54 12.55 12.56 12.57 12.58 12.59 12.60 12.61 12.62 12.63 12.64 12.65 12.66 12.67 12.68 12.69 12.70 12.71 12.72 12.73 12.74 12.75 12.76 12.77 12.78 12.79 12.80 12.81 12.82 12.83 12.84 12.85 12.86 12.87 12.88 12.89 12.90 12.91 12.92 12.93 12.94 12.95 12.96 12.97 12.98 12.99 13.00 13.01 13.02 13.03 13.04 13.05 13.06 13.07 13.08 13.09 13.10 13.11 13.12 13.13 13.14 13.15 13.16 13.17 13.18 13.19 13.20 13.21 13.22 13.23 13.24 13.25 13.26 13.27 13.28 13.29 13.30 13.31 13.32 13.33 13.34 13.35 13.36 13.37 13.38 13.39 13.40 13.41 13.42 13.43 13.44 13.45 13.46 13.47 13.48 13.49 13.50 13.51 13.52 13.53 13.54 13.55 13.56 13.57 13.58 13.59 13.60 13.61 13.62 13.63 13.64 13.65 13.66 13.67 13.68 13.69 13.70 13.71 13.72 13.73 13.74 13.75 13.76 13.77 13.78 13.79 13.80 13.81 13.82 13.83 13.84 13.85 13.86 13.87 13.88 13.89 13.90 13.91 13.92 13.93 13.94 13.95 13.96 13.97 13.98 13.99 14.00 14.01 14.02 14.03 14.04 14.05 14.06 14.07 14.08 14.09 14.10 14.11 14.12 14.13 14.14 14.15 14.16 14.17 14.18 14.19 14.20 14.21 14.22 14.23 14.24 14.25 14.26 14.27 14.28 14.29 14.30 14.31 14.32 1



$$\left\{ \begin{array}{l} Q := Q_1 \otimes Q_2 \\ P := P_1 \otimes P_2 \otimes P_3 \end{array} \right.$$

$$e \text{ 与 } x \text{ 的 } 3 \text{ 次方} = e_{12} = \frac{1}{12} e_{12}$$

twisted trace  $\varepsilon \langle \rangle$ .

# Def (twisted trace)

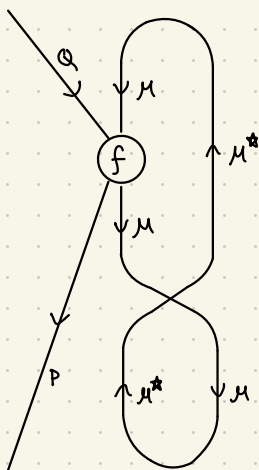
Symmetric Monoidal Category  $2^{nd}$  def

$$Q \otimes M \xrightarrow{f} P \otimes M \quad \text{is an isomorphism}$$

$$M = \text{dualizable} \quad \text{tr}(f) : Q \longrightarrow P$$



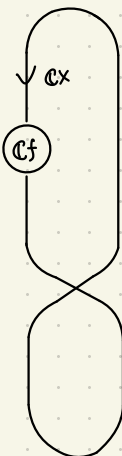
$\text{tr} \rightsquigarrow$



$\simeq$  (isotopy)

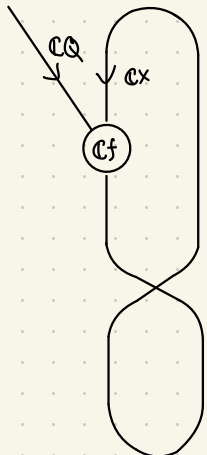
e.g.)  $\# \{ f \text{ の 不動点} \}$  により決まる。

$f: X \longrightarrow X$  : 有限集合の自己写像 について。



$$\begin{aligned}
 & \sum_{x \in X} x \otimes p_x \\
 & \downarrow \\
 & \sum_{x \in X} f(x) \otimes p_x \\
 & \downarrow \\
 & \sum_{x \in X} p_x \otimes f(x) \\
 & \downarrow \\
 & \sum_{x \in X} p_x(f(x)) = \# \{ f \text{ の 不動点} \}
 \end{aligned}
 \quad = \operatorname{tr}(cf) = \# \{ f \text{ の 不動点} \} \quad \text{である。}$$

$f: Q \times X \longrightarrow X$  ,  $X$ : 有限 について。



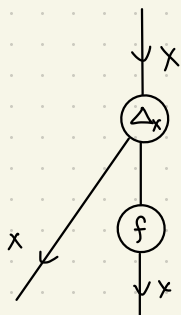
$$\begin{aligned}
 & \sum_{x \in X} q \otimes x \otimes p_x \\
 & \downarrow \\
 & \sum_{x \in X} f(q, x) \otimes p_x \\
 & \downarrow \\
 & \sum_{x \in X} p_x \otimes f(q, x) \\
 & \downarrow \\
 & \sum_{x \in X} p_x(f(q, x)) = \# \{ f(q, -) \text{ の 不動点} \}
 \end{aligned}$$

$q \in Q$  により  $f(q, -)$  の不動点の個数を知る。

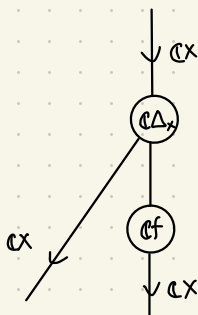
$f: X \longrightarrow X$  : 有限集合  $X$  の自己写像 (2011.2).

複製!!

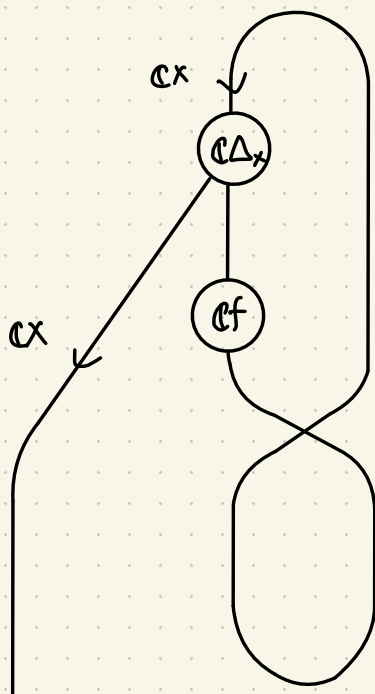
$$X \xrightarrow{\Delta_X} X \times X \xrightarrow{1_X \times f} X \times X$$



$\cong$



の trace は  $\sum x f(x)$ .



$$\sum_{x \in X} x \otimes p_x$$

$$\sum_{x \in X} x \otimes x \otimes p_x$$

$$\sum_{x \in X} x \otimes f(x) \otimes p_x$$

$$\sum_{x \in X} x \otimes p_x \otimes f(x)$$

$$\sum_{x \in X} p_x(f(x)) \cdot x = \sum_{x: f(x)=x} x$$

不動点の形式和と固定点

個数より  
おもしろい。

## § 4.2 トレースと不動点

トレースと不動点の関係は string で見たい。

基本的な3行3列は output に輪っか (Trace) で

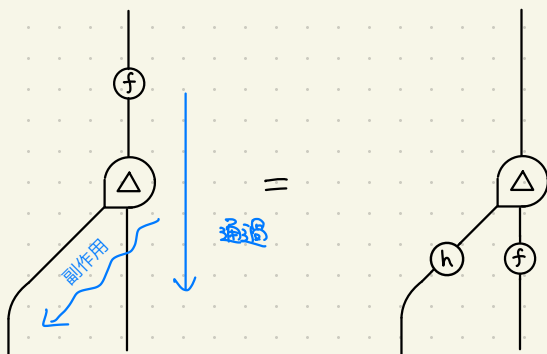
input を戻せるようにする。

# Prop (Fixed Point Property)

Symmetric Monoidal Category  $\mathcal{C}$  について.

dualizable object  $M \in \mathcal{C}$ , morphism

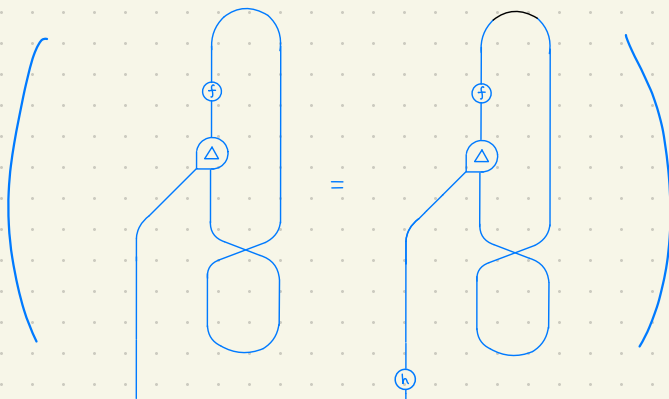
$$\begin{cases} \Delta : M \longrightarrow P \otimes M \\ f : M \longrightarrow M \\ h : P \longrightarrow P \end{cases} \quad \text{の関係式}$$



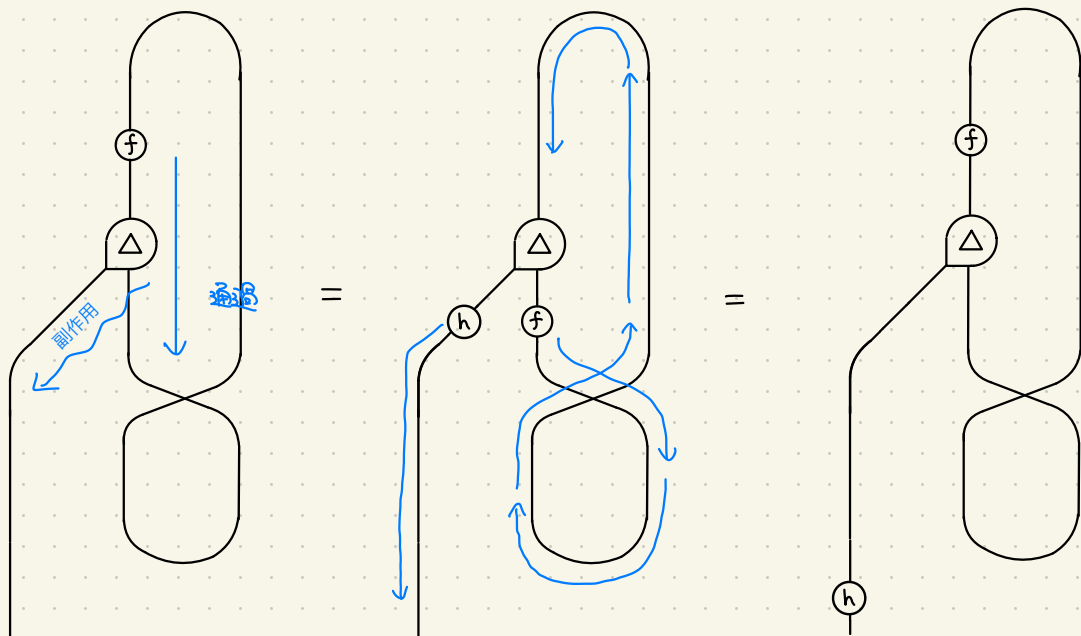
これは  $\mathcal{C}$  の関係式.

$\text{tr}(\Delta \circ f)$  は  $h$  の fixed point, I 330 頁

i.e.  $h \circ \text{tr}(\Delta \circ f) = \text{tr}(\Delta \circ f)$



(proof)



Q "this setting"  $\triangle$  exists?

A 1st answer is  $\text{no}$ .

|                        |                             |
|------------------------|-----------------------------|
| Cartesian Monoidal     | 自然 $\triangle$ が存在がトレースは自明  |
| not Cartesian Monoidal | 自然 $\triangle$ は存在がトレースは非自明 |

$\Sigma = \Sigma$ ,  $\begin{cases} \mathcal{C} : \text{Cartesian Monoidal} \\ \mathcal{D} : \text{not Cartesian Monoidal} \end{cases}$  (2nd).

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} : \text{Symmetric monoidal 構造を保つ.}$   
(1st variation #13)

"this setting",  $X \xrightarrow{\Delta_X} X \star X$   
 $\downarrow F$

$$FX \xrightarrow{F\Delta_X} F(X \star X) \cong FX \otimes FX$$

$\Sigma$  exists

e.g.)  $\text{Set} \xrightarrow{R-} R\text{-Mod} \quad (R = \mathbb{C} \text{ or } \mathbb{Z} \text{ or } \mathbb{T})$

$T = \text{id}$  不動点の形成

e.g.)  $\text{Set} \xrightarrow{\iota} \text{Rel}$

$T = \text{id}$   $*$   $\longrightarrow X$  : 不動点,  $\text{id}$  は  $X$  の subset.

よく知られる.

## 5 私はまだ理解していない

Q Lefschetz fixed point theorem

が従うまで

+ トーヌの関係と関係

## TRACES IN SYMMETRIC MONOIDAL CATEGORIES KATE PONTO AND MICHAEL SHULMAN

Q twisted trace を公理的に取扱うと

traced monoidal category という概念を得る。

Computer science にも有用。

CC 上ではトーヌと不動点の間に強い  
対応がある。

Masahito Hasegawa.

The uniformity principle on traced monoidal categories.

Q Bicategory の一般化

Kate Ponto.

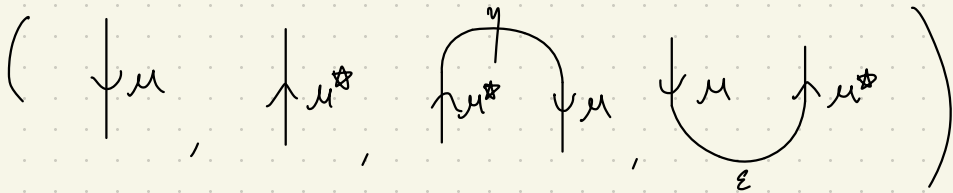
Fixed point theory and trace for bicategories.



or  $|Z| \neq 1$  (between  $\mathcal{C}(Y, Y^*)$ ,  $\mathcal{C}(X \otimes Y, Z)$ )

or  $\neq 1$  or  $\neq 0$ .

Lemma (dual is weak dual)



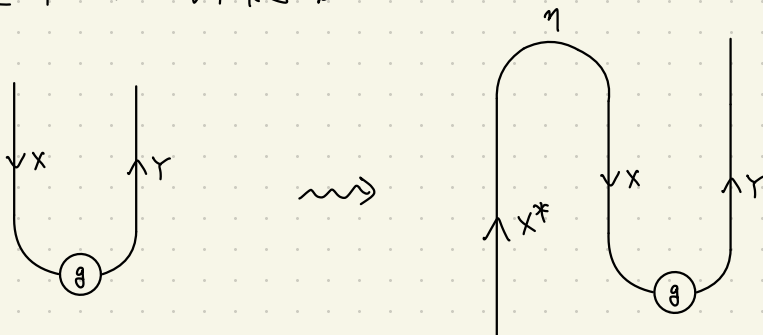
or dual is.

( $\uparrow \mu^*$ ,  $\downarrow \mu \uparrow \mu^*$ ) is  $M$ 's weak dual.

---

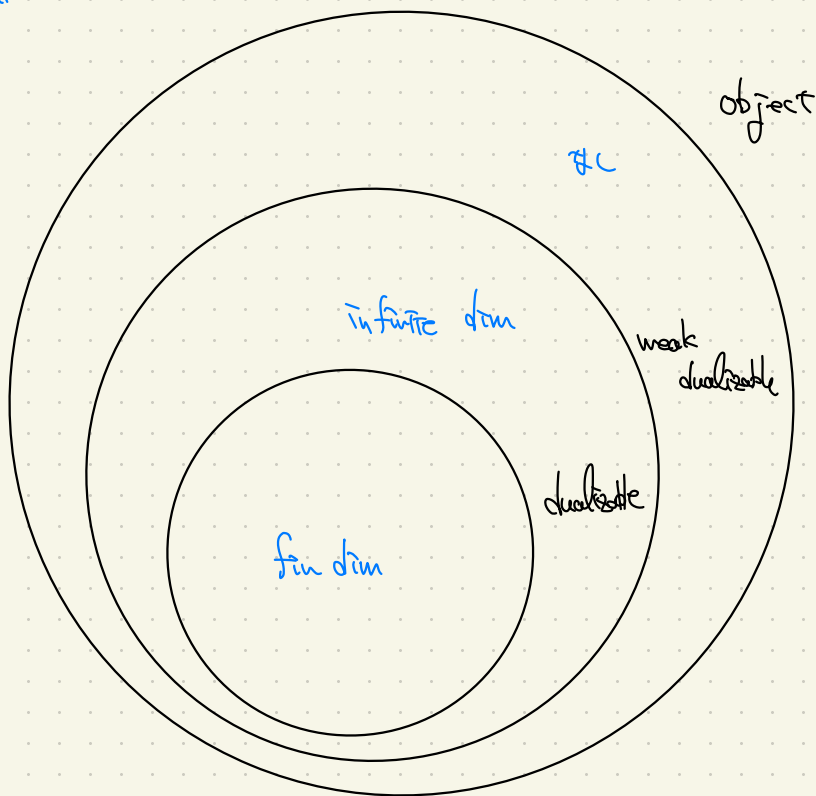
(proof)

逆方向の対応



or  $\neq 1$ .

Vector 22c



Cor (monoidal closed  $\mathcal{V}$  is a dual of  $\mathcal{V}$ )

$\mathcal{V}$ : monoidal closed,  $X$ : dualizable  $\mathcal{V}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} X^* = [X, I] \quad (X \otimes - \dashv [X, -]) \\ X \otimes X^* \longrightarrow I := \text{counit} \end{array} \right.$$

$\mathcal{V}$  is a  $\mathcal{V}$  dual.

Remark (weak dual is essential uniqueness is not established.)

Prop (dual of weak dual is the original definition)

$$\left( \downarrow_M, \uparrow_{M^*}, \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow_{M^*} \end{array} \downarrow_M, \downarrow_M \uparrow_{M^*} \right)$$

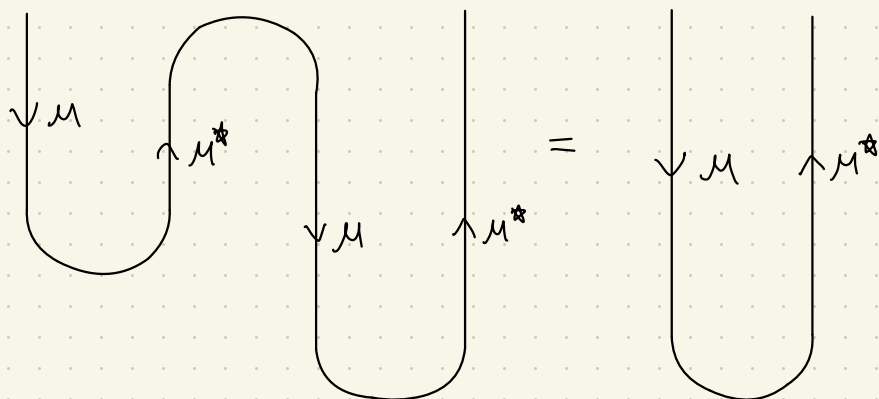
is to say,  $M^* = \text{weak dual}$  is to

$$\begin{array}{c} \downarrow_M \\ \uparrow_{M^*} \end{array} \downarrow_M = \downarrow_M \quad \text{is to say,}$$

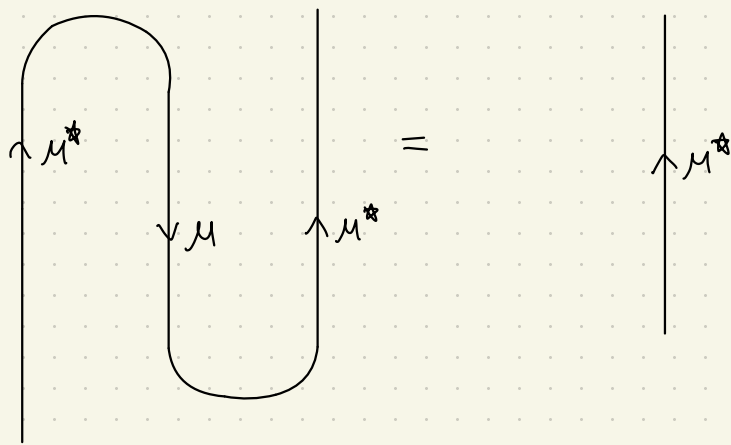
$$M^* = \text{dual}$$

(proof)

$$\downarrow_{M^*} \text{ is to say,}$$



∴ 得<sub>3</sub>. weak dual a def 12 的 IT3 Uniqueness 21)



∴ 得<sub>2</sub>.

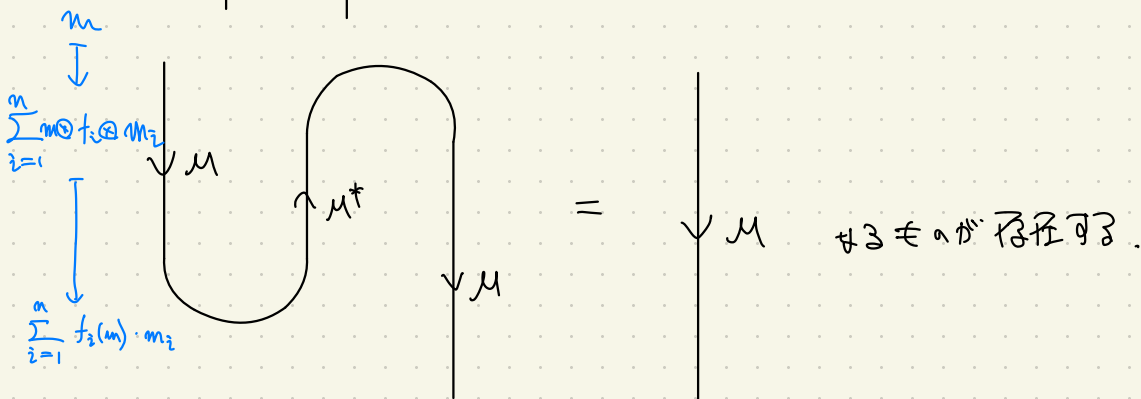
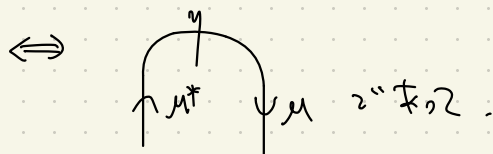
e.g.)  $R = \text{cring}$  is sur.  $R\text{-Mod}$  is dualizable object  $\hat{=}$

≠ 決定 (2.11).  $R\text{-module } M$  is

$R\text{-Mod}(M, R) \cong \text{Hom}_R(M^*, M^*)$  is weak dual is

is sur,  $\Gamma$  is prop  $\hat{=}$

$M$ : dualizable



$$\Leftrightarrow \exists \sum_{i=1}^n f_i \otimes m_i \in M^* \otimes_R M$$

$$\text{s.t. } \forall m \in M \quad \sum_{i=1}^n f_i(m) \cdot m_i$$

$$\Leftrightarrow R^n \xleftarrow{<} M \xrightarrow{>} R^n : \text{retract} \text{ が存在する.}$$

$$\Leftrightarrow M: \text{finitely generated projective module.}$$

Remark (なぜ projective が出てきたのか? の 1 つの表裏の裏の答え) ε 73

$$\text{例は. } A \xleftarrow[p]{s} B : \text{retract. } A: \text{dualizable} \text{ かつ,}$$

$$B: \text{weak dualizable} \Rightarrow B: \text{dualizable} \text{ かつ.}$$

つまり, 一般に weak dualizable objects  $X, Y$  の間の射  $X \xrightarrow{f} Y$  について, (weak dual n def 参照)

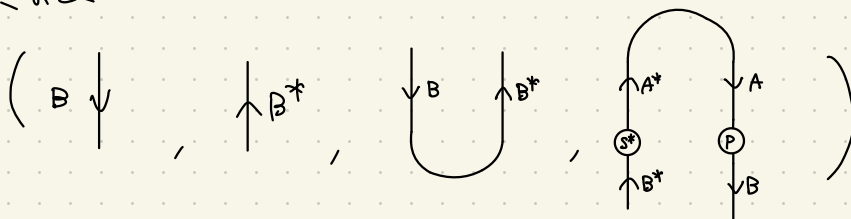
$$\begin{array}{c} \downarrow x \\ \textcircled{f} \\ \downarrow Y \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow Y^* \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow x \\ \textcircled{f^*} \\ \uparrow X^* \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow Y^* \end{array}$$

#3



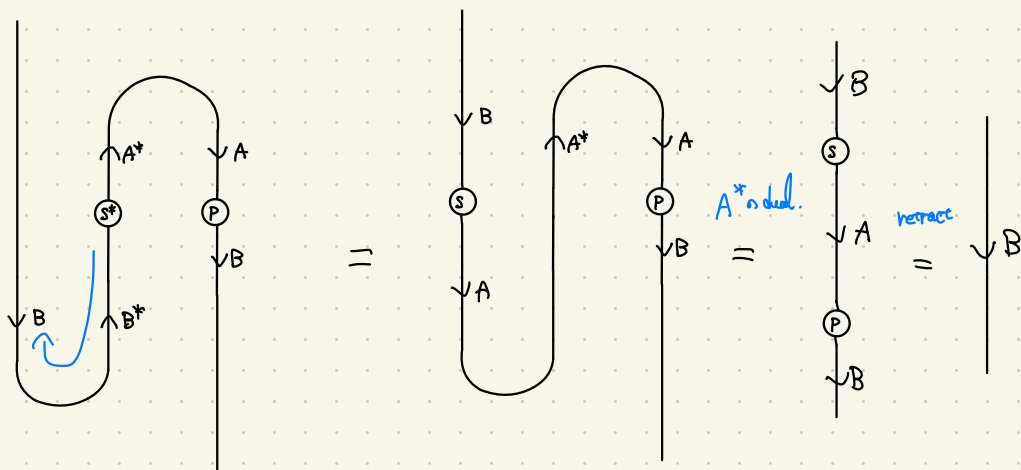
"unique" 12 存在する 2 個の 1 個

= 0 2 5



17 dual 2 5 3 0.

(proof)



H