

R-aleg

- §1. 和や雪江先生の $\mathcal{A}$
 - §2. End を使った記述
 - §3. 今井先生の $\mathcal{A}$
- 環
}
結合代数

ネタバレしちゃうが要約

Q 雪江先生と今井先生の $\mathcal{A}$ は 無関係じゃない？

Q R-代数 には 2つの視点.

- 1. R の ring hom (雪江)
- 2. R の群であり環でもある (今井)
が、好い！

Q 環を考えたとき $\mathcal{A}$ の2つは一致するけれど、

結合代数に結構な数の 2つの視点の

大抵は合うぞ！！

§1. 和村雪江先生のdf

(結合代数 $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{C}$) 環で話を可視化。

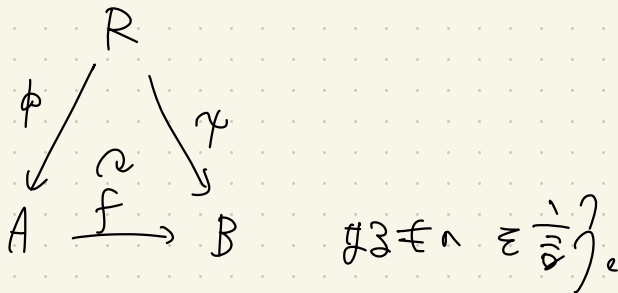
Def (R -alg)

R : ring, $1 \neq 0$, R -alg $\in \text{Set}$, A : ring $\in$

$\phi: R \longrightarrow A$: ring hom の系 (A, ϕ) の集合 (1),

R -alg (A, ϕ) と (B, ψ) の R -alg hom $\in \text{Set}$

ring hom $A \xrightarrow{f} B$ 2つあり



(Remark $R\text{-Alg}$: category of R -alg)
 $\cong R/\text{Ring}$

Remark

環 R 上の A は R の R -module である。

R -alg である $A = \text{ring}$ である。

$$\text{Ring}(R, A) \neq \emptyset \quad \text{である。}$$

$\text{Ring}(R, A)$ は R -Alg の Ring の full subcategory である。

これは、 R は (R, A) の R である。

(R, A) は R -Ring の R である。

Remark

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$ は, $R = \text{cring}$ 1-2112 R/CRing

$\mathbb{Z} \subset R$ Alg $\subset \mathbb{Z} \subset R \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$ は $\mathbb{Z}/\text{CRing}$ 1-2112 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$ 1-2112.

R/CRing $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$ は "coproduct" $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}_2 - \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}$ (2 1-2112 $\mathbb{Z}_2$).

代数的 $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}_2$ の $\mathbb{Z}$ は

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{fully faithful}} \mathbb{Z}_2$ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}/\text{CRing} \xrightarrow{\text{fully faithful}} \mathbb{Z}/\text{Ring}$ は $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_2$!

Remark

今日の話題は $\mathbb{C}$ 上の $n \times n$ 行列の環 $M_n(\mathbb{C})$ である。

$M_n(\mathbb{C})$: $n \times n$ 正則行列の環

*(可換!)

$$\begin{array}{ccc} \phi: \mathbb{C} & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ \psi & & \downarrow \\ \lambda & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{これは } \mathbb{C}\text{-alg 構造}$$

を考へてみる。

$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $\lambda A = A \lambda$

$$(\text{注}) \quad \phi(\lambda) A = A \phi(\lambda)$$

これは、 $\lambda A = A \lambda$ である。

これは、 $\lambda A = A \lambda$ である。

これは、 $\lambda A = A \lambda$ である。これは、 $\lambda A = A \lambda$ である。
はい、これは、 $\lambda A = A \lambda$ である。!

$\hookrightarrow \S 2.1$

§ 2, End を使った記述

R -alg A ($\phi: R \rightarrow A: \text{ring hom}$)

において, R が $\phi \in \pi$ として A 中での λ の ϕ による

振る舞いとは $\phi(\lambda) = \lambda \phi(1)$ である? 1つは

$\phi(1)$ は A の中心 $Z(A)$ に属するから $\phi(1) \in Z(A)$ である。

Def (A の中心)
 R 環 R において, $Z(R) := \{r \in R \mid \forall a \in R, ar = ra\}$
 $Z(R)$ は R の中心である。 $Z(R)$ は R の部分環である。

e.g.) $Z(M_n(\mathbb{C})) = \phi(\mathbb{C})$ ($\phi: \mathbb{C} \xrightarrow{\lambda \mapsto \lambda I_n} M_n(\mathbb{C})$)

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^1, \quad \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{inj}} \mathbb{Z},$$

Def (200 - 15 R - 代数)

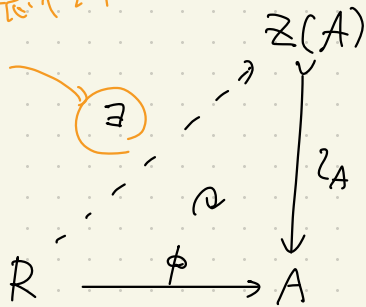
R : ring, A : ring $\phi: R \rightarrow A$, ring hom (200-15?)

R -alg (A, ϕ) 200-15 R -alg $\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{inj}} \mathbb{Z}$,
 ϕ 200-15 $\mathbb{Z}(A) \xrightarrow{\iota_A} A$ (inj = 200-15) ring hom

ϕ 200-15 $\mathbb{Z}(A) \xrightarrow{\iota_A} A$ (inj = 200-15) ring hom

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{inj}} \mathbb{Z}$

200-15 200-15!



(in Ring)

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{inj}} \mathbb{Z}$

200-15 R -alg の図 (R -Alg a full-subcategory)

$\mathbb{Z} R$ -sAlg $\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{inj}} \mathbb{Z}$

Remark $A = \text{cring } \mathcal{H}_S, \quad \mathcal{Z}(A) \xrightarrow{\mathcal{Z}_A} A = \text{iso}$

Ex. 1. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ a $\mathbb{Z}$ -alg is not a PID!

$\exists \varphi(r) \cdot -$ 17 $- \cdot a$ (右 ϕ の積) $\in$ 可換性 $a \cdot 1$,

$A \ni$ 右 A の群 $\in$ 交換性 $\Rightarrow$ 本質的 ϕ $\neq$ (らしい)。

Prop ($A \cong \text{End}_{\text{Mod-}A}(A)$) Tachikawa, Ab-enriched
Yoneda Lemma 等.

A : ring の右 A -mod 群 $\in$ 2つの自己準同型環

$\text{End}_{\text{Mod-}A}(A)$ は

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \text{End}_{\text{Mod-}A}(A) \text{ : ring hom} \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & \longmapsto & a \cdot - \end{array}$$

$\Rightarrow$ 2つの環 $\in$ 同型

(proof)

inj $a \neq a' \Rightarrow \phi \cdot - \neq \phi' \cdot -$ ($\because I_A$ a について $a \neq a'$)

surj $\phi \in \text{End}_{\text{Mod-}A}(A) \Rightarrow \exists \phi(a) = \phi(I_A) \cdot a$

51. $\phi(\exists \phi(I_A) \cdot -) \cong$ 等しい。

//

$$R \xrightarrow{\phi} A \text{ is } R \xrightarrow{\phi^\#} \text{End}_{A^b}(A) \cong \gamma, \gamma^2$$

($\hat{\phi}$ is $\hat{\phi}$ a prop) and $\hat{\phi}$ is $\hat{\phi} = a = c$ and $\hat{\phi}^2 = 1$

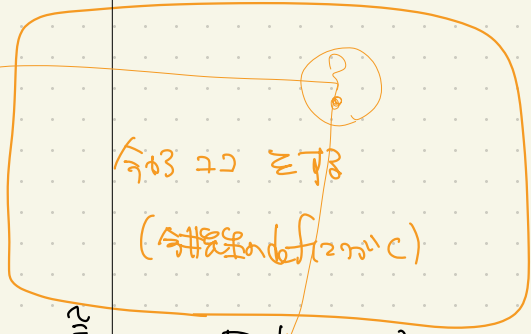
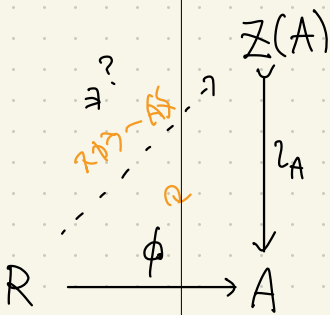
($\downarrow$ a diagram $\cong A^2$!)

$\hat{\phi}$ is a diagram

($\hat{\phi}$ is?)

($\hat{\phi}$ is?)

($\hat{\phi}$ is $\hat{\phi}$ and $\text{End}_{\hat{\phi}}(c)$)



$$\cong \text{End}_{\text{Mod-}A}(A)$$

$\cong$

$$\text{End}_{A^b}(A)$$

in Ring

Prop $(Z(A) \cong \text{End}_{(A,A)\text{-Mod}}(A))$

$A = \text{Ring}$ $\Rightarrow$ A の (左/右) A -加群 $\subseteq$ A

左 A -加群 $\subseteq \text{End}_{(A,A)\text{-Mod}}(A)$ $\subseteq$ $\text{Hom}(A, A)$

$$\begin{array}{ccc} Z(A) & \longrightarrow & \text{End}_{(A,A)\text{-Mod}}(A) : \text{ring hom} \\ \cup & & \cup \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \cdot - \end{array}$$

は A の同型。

(proof)
inj 写像

$$\left(\begin{array}{ccc} Z(A) & \longrightarrow & \text{End}_{(A,A)\text{-Mod}}(A) \\ \downarrow & \alpha & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\cong} & \text{End}_{\text{Mod}(A)}(A) \end{array} \right) \quad \text{b3, 7) 6th 2.13}$$

surj 写. $\phi \in \text{End}_{(A,A)\text{-Mod}}(A) \subseteq \text{Hom}(A, A) \subseteq \text{Hom}(A, A)$
 $\Rightarrow$ $\exists a \in A$ $\phi(a) = a$

$$a \cdot \phi(1_A) = \phi(a) = \phi(1_A) \cdot a$$

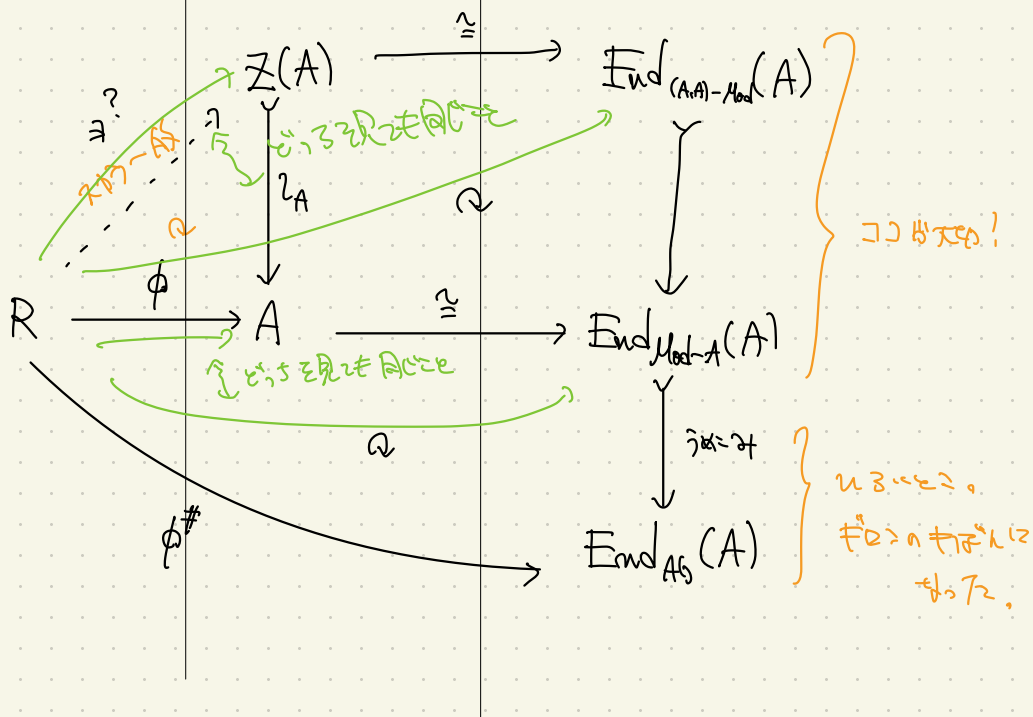
$$\text{すなわち, } \phi(1_A) \in Z(A) \text{ であり } \phi = \phi(1_A) \cdot -$$

Ex 2. § 2 a) A $\hat{E}^2$ diagram? $\# \in \mathbb{K}^2$.

(200-?)

(本行?)

(加群のEnd $\mathbb{Z}$)



in Ring

4430

→

$e \in R, R, A = \text{ring } eRe,$

「 A は e を用いた R -alg 構造」 $\hookrightarrow$

「 R 上の $\text{End}_{(A,A)\text{-mod}}(A)$ の環準同型」

は 1対1 対応する。

「Dunk $A = eR = eRe$ は、

A は R -alg 構造 $\iff R$ 上の $\text{End}_{A\text{-mod}}(A)$
 の Ring hom

(2.1.23)

3. M は R -mod

M は R -mod 構造 $\iff R$ 上の $\text{End}_R(M)$
 の Ring hom

(2.1.23) $\vdash$

e.g.) $L'(\pi)$ は π と $\pi_2 \pi_1 \pi_2 \pi_1 \pi_2$ 結合代数。

$f \in L'(\pi)$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ かつ $\alpha \cdot f \in L'(\mathbb{C}[[\pi]])$ だと

≠ π 結合代数 π $\mathbb{C} \rightarrow L'(\mathbb{C}[[\pi]])$ は良い!

Maine の def. 7.1

$R = \text{rng}$ について, R -結合代数とは

$A = \text{rng}$ と $R \xrightarrow{\rho} A = \text{rng}$ である組

は ρ の π である π である

≠ π である A の π は R の π である

(π の π は π の π) が π の π , π の π !

(π の π は π の π)

π の π

Q diagram of Hom is End or not?

(is it?)

(is it?)

(is it End ?)

is it End ?

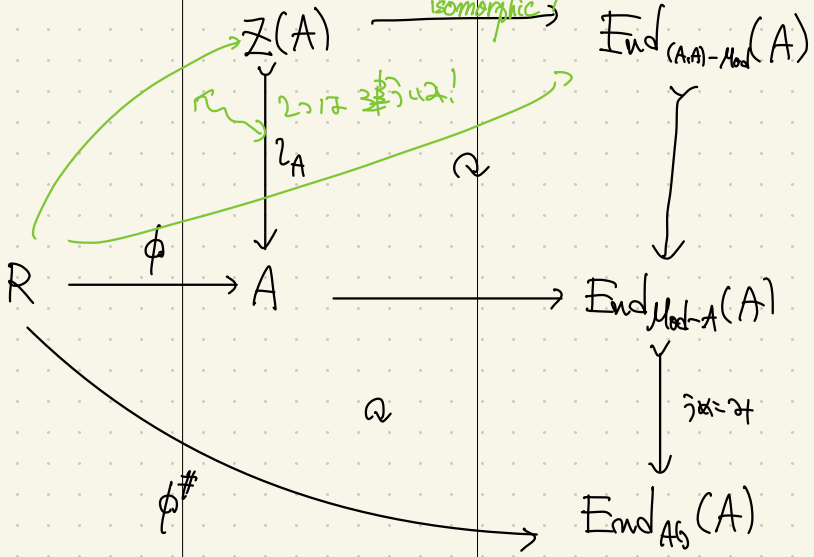
is it End ?

is it End ?

is it End !!

Not necessarily isomorphic

is it End ?



in Ring

Q 証明は？

R -結合代数 (A, ϕ) , (A', ϕ') について,

A と A' の R -結合代数 hom 同,

$f: A \longrightarrow A' = \text{ring hom}$ について

R の作用と可換性 $a \in A$ について f が成り立つ。

証明は下!

Prop (環 a は可換)

$R, A, A' : \text{ring}$, $\phi: R \longrightarrow A$, $\phi': R \longrightarrow A'$ と

$f: A \longrightarrow A' = \text{ring hom}$ について,

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{1} & R & \xrightarrow{\phi} A \\ & \searrow \scriptstyle a & \downarrow \scriptstyle f \\ & & A' \end{array}$$

(R -bly hom)

$$\textcircled{2} \quad \forall r \in R, \forall a \in A$$

$$f(\phi(r) \cdot a) = \phi'(r) \cdot f(a)$$

(作用と可換)

(proof) $\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2} \quad f(\phi(r) \cdot a) = f(\phi(r)) \cdot f(a) = \phi'(r) \cdot f(a)$
 $\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{1} \quad a \in {}_R L_A \text{ である。}$