

Quotient Topoi

洞龍弥

2022 年 4 月 19 日

目次

1	導入	2
2	一貫性のない表記について	3
3	定義といくつかの例	3
4	群作用 topos の Quotient topos	3
5	前層圏間の Quotient を誘導する関手: 連結稠密関手	6
6	連結トポス	10
7	well-founded quotient	11
8	hyperconnected geometric morphism	13
9	hyperconnected より狭いクラス	15
10	連結稠密性の性質: cancellation property の利用	18
11	導来亜群についての詳細	20
12	prequotient の完備束	21
13	Solid monoids	23
14	colevels of a topos	28
15	colevels of a presheaf topos: 連結稠密関手再考	29
16	Top-enrichments induce hyperconnected geometric morphisms	30
17	co-Grothendieck and Grothendieck topos	34

18	Vopěnka principleのもとで prequotient = quotient	34
19	多分書く内容	34
19.1	安直はなぜうまくいかないのか 1: internal lex comonad	34
19.2	安直はなぜうまくいかないのか 2: factorization system	34
19.3	自然に考えるべきだが結論がつかまらない考察	34
19.4	lax epi vs epi と colevel の数の上限	34
20	うまくいったら書く内容	35
20.1	internal topological space	35
20.2	co-Grothendieck topos と idempotent adjunction となる Geometric Morphism	35
20.3	安直はなぜうまくいかないのか 3: lex comonad の idempotent 化	35
20.4	preorder における類似問題	35
20.5	Boolean Quotient	35
20.6	Prequotient lattice of a poset action topos	35
21	勉強してからなんかあれば書くやつ	35
21.1	Toposes as Groupoids との関係	35
21.2	ionad との関係	35
21.3	locally presentable category theory との関係	35
21.4	first-order modal logic との関係	35
21.5	geometric logic 的な解釈	35
22	個人的未解決な部分問題	35

1 導入

topos の概念は位相空間上の層の圏を一般化して得られた。層の理論において基本的な役割を果たす前層の層化の概念は前層圏に限らない任意の topos に一般化される。トポスの full subcategory であって埋め込みが lex な左随伴を持つものは subtopos と呼ばれ、トポス上の lex idempotent monad と対応している。さらに非自明なことに、subtopos は Lawvere-Tierney topology と呼ばれる topos-internal な様相演算子とも一対一対応する。

一方、topos $\mathcal{E}$ 上の lex comonad G についても、その (co-)algebra の圏 $\mathcal{E}^G$ は再び topos になる。このようにして得られる Geometric Morphism $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^G$ を surjection という。すべての Geometric Morphism は本質的に一意的な方法で、surjection と (subtopos の)embedding の合成へと分解される。

ここで、subtopos と surjection は factorization system の中で対をなす働きをしているように表現した。しかし、surjection は subtopos に比べて膨大に存在し得ることに注意したい。subtopos は Lawvere-Tierney topology と対応することから、どんな locally small topos (例えば (small site 上の)Grothendieck topos) に対しても small 個しかない。しかし、Set を考えるだけでも Set からの surjection は proper class 個存在している。ここには、対応する (co)monad に idempotent 性が課されているかに関して本質的な違いがある。subtopos は lex idempotent monad と対応しているのに対して surjection は lex comonad と対応している。

Quotient topos は lex idempotent comonad と対応する概念である。Quotient topos がどれだけ多く存在するか、topos 内に対応する構造はあるのか、はまだ未解決であり、Lawvere の OPEN PROBLEMS IN TOPOS THEORY [9] の (1) として取り上げられている。この文章はこの問題への興味のもとで quotient について考えたことの記録である。文章構成は考えた時系列のままであり、私ではない人間が体系的に読み進めることを想定したものにはなっていない。

2 一貫性のない表記について

導入でも述べたように、この文章は考える時系列に従って書いており、体系的に書かれたものではない。ある程度議論を進めたのちに名前がついていることを知る場合など、文章中で同じ概念を別の名前で言及することもある。それらを列挙しておく。

- quotient, connected geometric morphism
- essential quotient, colevel
- atomic quotient, logical quotient
- 導来亜群, 基本亜群
- lax epi, 連結稠密, solid

3 定義といくつかの例

Definition 3.1 (Quotient topos). topos $\mathcal{E}$ の quotient topos とは, $\mathcal{E}$ の full subcategory $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{Q}$ であって,

- 埋め込みが lex(全ての finite limit を保つ)
- 埋め込みが right adjoint を持つ

を満たすものをいう。

$\mathcal{E}$ から伸びる Geometric morphism f であって inverse part f^* が fully faithful なもの, と言ってもいい。

Example 3.2 (位相群). 位相群 T について, T の台となる (離散位相) 群を T^δ とかく。 T の連続左作用の topos $T\text{Set}$ から T^δ の左作用の topos $T^\delta\text{Set}$ への埋め込みは Quotient になっている。

Definition 3.3 (well-founded quotient). cocomplete topos $\mathcal{E}$ について, その well-founded object からなる topos $\mathcal{E}_{\text{w.f.}}$ からの埋め込みは Quotient である。

4 群作用 topos の Quotient topos

例として, 群 G が与えられた時に G の左作用の topos $G\text{Set} := \text{Set}^G$ の Quotient topos を決定する。結論は, 全ての Quotient topos は example 3.2 の形で位相群から与えられる, というものである。

まず, 準備として位相群の話をする。この文章だけの用語を準備しておく。

Definition 4.1 (簡素位相群). 位相群 T が簡素 (plain) であるとは, T の open subgroup が単位元 $e \in T$ の基本開近傍系をなすことをいう。

Example 4.2. p 進整数の p 進距離による位相群 $\mathbb{Z}_p$ は簡素だが、実数と Euclid 距離による位相群 $\mathbb{R}$ は簡素でない。

Definition 4.3 (正規フィルター). 群 G について、その部分群と包含関係のなす順序集合 (完備束になる) を $\text{SubGrp}(G)$ と書く. $\text{SubGrp}(G)$ の共役な部分群をとる操作に関して閉じた filter を群 G の正規フィルターと呼ぶことにする. つまり、群 G の正規フィルターとは、 $\text{SubGrp}(G)$ の部分集合 $\mathcal{F}$ であって、以下の4つの条件を満たすものをいう。

- $G \in \mathcal{F}$
- 包含関係にある部分群 $H \subset H' \subset G$ について、 $H \in \mathcal{F}$ ならば $H' \in \mathcal{F}$
- $H, H' \in \mathcal{F}$ なら $H \cap H' \in \mathcal{F}$
- $H \in \mathcal{F}$ かつ $g \in G$ なら $gHg^{-1} \in \mathcal{F}$

実は、群 G について、 G を台にもつ簡素位相群構造と G 上の正規フィルターは一対一に対応し、さらに $G\text{Set}$ の Quotient と一対一対応する。

Lemma 4.4 (位相群から正規フィルター). 位相群 T について、 T の open subgroup の集合 $\mathcal{F}$ は T の台となる (離散) 群 T^δ 上の正規フィルターを与える。

Proof. 略. □

Lemma 4.5 (正規フィルターから位相群). 群 G と G 上の正規フィルター $\mathcal{F}$ について、 $\mathcal{F}$ を open subgroup 全体の集合として持つような G 上の簡素位相群構造が一意的に存在する。

Proof. G の部分集合族 $\mathcal{U}$ を

$$\mathcal{U} := \{gHg' \mid g, g' \in G, H \in \mathcal{F}\}$$

と定める. $\mathcal{U}$ を開基とする位相構造を考えれば良い. $\mathcal{F}$ は共役な部分群をとる操作で閉じていることを思い出すと、 $gHg' = gg'(g'^{-1}Hg')$ と変形することで

$$\mathcal{U} = \{gH \mid g \in G, H \in \mathcal{F}\}$$

がわかる. このことを利用すると良い. □

Theorem 4.6 ($G\text{Set}$ の quotient の決定). 群 G について、以下の4つの構造は一対一に対応する。

1. $G\text{Set}$ の Quotient topos^{*1}
2. $G\text{Set}$ 上の lex idempotent comonad^{*2}
3. G 上の簡素位相群構造
4. G 上の正規フィルター

Proof. 1 と 2 の対応は一般的なもの. 3 と 4 の一対一対応は前二つの lemma から直ちに従う. また、3 から 1 を作る方法は example 3.2 で紹介している. 1 から 4 を作る方法を記述する. $\text{quotient topos } G\text{Set} \leftarrow \mathcal{Q}$ を任意にとる. ここで、 $\mathcal{Q}$ は strict な full subcategory であり ($\mathcal{Q}$ の対象や射は $G\text{Set}$ のものだとよくて), $G\text{Set}$ での同型類に関しても閉じているものとして考えて良い.

^{*1} 厳密には、埋め込みと整合的な圏同値による同値類

^{*2} 厳密にはその comonad としての同型類

第一の考察として、 $\mathcal{Q}$ は $G\text{Set}$ における finite limit と任意の small colimit を strict に create する。従って、特に terminal object 2つの直和である、 $G\text{Set}$ での subobject classifier を持っている。また pullback でも閉じているので $\mathcal{Q}$ は subobject を取る操作で閉じている。従って、 $\mathcal{Q}$ の対象 X に関して、 X の各連結成分も $\mathcal{Q}$ に入っている。一方、small colimit で閉じているので、 $\mathcal{Q}$ に入っている連結な $G\text{set}$ の small coproduct も $\mathcal{Q}$ に入っている。ところで、連結な $G\text{set}$ は G の部分群 H を用いて剰余類 G/H とかける。従って、 $\mathcal{Q}$ は次のような G の部分群の族

$$\mathcal{F}_{\mathcal{Q}} := \{H \in \text{SubGrp}(G) \mid G/H \in \text{ob}(\mathcal{Q})\}$$

によって決定される。 $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ は $\mathcal{Q}$ の対象のある元の stabilizer として現れる部分群全体の集合と言っても同じことである。 $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ が G 上の正規フィルターなことを証明したい。 $\mathcal{Q}$ は finite limit で閉じているので、特に terminal を持ち $G \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ となる。また finite product で閉じているので finite intersection でも閉じている (stabilizer として考えると良い)。 G/H と $G/(gHg^{-1})$ は $G\text{set}$ として同型なので共役類でも閉じている。最後に、 $H \subset K \subset G$ なる部分群の包含関係があり、 $H \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ であるとして $K \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ を導く。 $k \in K$ ごとに、 $S_k := H \cap kHk^{-1}$ と定めると $S_k \mapsto H$ なる $G\text{set}$ の射 $*e : G/S_k \rightarrow G/H$ と $S_k \mapsto kH$ なる $G\text{set}$ の射 $*k : G/S_k \rightarrow G/H$ が well-defined にかつ一意的に定まる。 $S_k \in \mathcal{F}$ である。従って

$$\coprod_{k \in K} G/S_k \xrightarrow[\coprod_{k \in K} *k]{\coprod_{k \in K} *e} G/H$$

なる diagram は $\mathcal{Q}$ の中に入っており、その coequalizer である G/K も $\mathcal{Q}$ に入っている。従って $K \in \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ がわかった。

これらの対応が一対一対応を与えていることは簡単に確認できる。 □

Corollary 4.7 (位相群作用のトポスの quotient の決定). 位相群 T について、連続な左 T 作用の topos $T\text{Set}$ の quotient topos は、 T の open subgroup からなるような T^δ 上の正規フィルターと一対一に対応する。

Proof. $T\text{Set}$ の quotient topos は T^δ の quotient topos でもあることからわかる。 □

Example 4.8 (quotient of $\mathbb{Z}\text{Set}$). $\text{SubGrp}(\mathbb{Z})$ は非負整数と剰余関係のなす完備束 $(\mathbb{N}, |)$ と反変同型である。 $\mathbb{Z}$ はアーベル群であるので、部分群は自身とのみ共役である。従って、 $\mathbb{Z}\text{Set}$ の Quotient topos (および $\mathbb{Z}$ 上の簡素位相群構造) は $(\mathbb{N}, |)$ の ideal (フィルターの双対概念) と一対一に対応する。その個数は連続体濃度 $2^{\aleph_0}$ であり、subtopos が自明な 2 つしかないことと対照的である。

非負整数全体 $I = \mathbb{N}$ からなる ideal に対応する位相群は離散位相であり、対応する quotient は $\mathbb{Z}\text{Set}$ 全体である。一方、 $I = \{1\}$ だに対応する位相群は密着位相であり対応する quotient は $\mathbb{Z}\text{Set} \leftarrow \text{Set}$ (well-founded quotient) である。

もう少し興味深い例を挙げる。ideal $I = \{1, 2, 3, \dots\}$ に対応する位相群は profinite integer $\hat{\mathbb{Z}}$ の部分群としての位相群 Z であり、対応する quotient は各連結成分が有限な $\mathbb{Z}\text{set}$ からなる full subcategory である。この topos は Freyd の論文 [5] の前書きにて、IAC が満たされないが (文脈上嬉しくないことに) well-founded でない topos の例として紹介されているものである。また、素数 p ごとに、 $I = \{1, p, p^2, p^3, \dots\}$ なる ideal が存在し、対応する位相群は p 進整数 $\mathbb{Z}_p$ の部分群としての $\mathbb{Z}$ であり、対応する quotient は連結成分の大きさが p ベキであるような $\mathbb{Z}\text{set}$ からなる full subcategory である。

Example 4.9 (単項正規フィルター). (section 9 を書くときの追記)

群 G の正規フィルター $\mathcal{F}$ であって、フィルターとして単項生成なものを考える。つまり、ある $H \in \text{SubGrp}(G)$ を用いて

$$\mathcal{F} = H\uparrow (:= \{H' \in \text{SubGrp}(G) \mid H \subset H'\})$$

とかけるような $\mathcal{F}$ を考える。このような H は $\mathcal{F}$ の元全ての共通部分であり (従って一意的に定まり), $\mathcal{F}$ の正規性から必然的に正規部分群でなければならない。 G 上の単項正規フィルターは G の正規部分群と、従って G の剰余群 (の剰余写像と可換な同型類) と一対一に対応する。正規部分群 H で生成されるフィルター $\mathcal{F}$ に対応する $G\text{Set}$ の quotient は剰余群 G/H の左作用のトポス $G/H\text{Set}$ である。このように、群作用の剰余トポスは群の剰余を拡張する概念とすることができる。ちなみに、対応する簡素位相群構造は群準同型 $G \rightarrow G/H$ によって離散群 G/H の位相を引き戻したものと捉えられる。より詳しい話は exmple 9.8 で書く。

5 前層圏間の Quotient を誘導する関手: 連結稠密関手

後に、この章の内容と合致した論文 [1] を見つけた。以下で考える連結稠密関手は, [1] では lax epimorphism と呼ばれている。

小圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 間の関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は geometric morphism $F_* : \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ を誘導する。この geometric morphism はいつ quotient を与えるのかを考える。つまり, precomposite functor

$$- \circ F^{\text{op}} : \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$$

が fully faithful になるための F に関する必要十分条件を考える。

Remark 5.1 (surjection を与える条件). $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ in Cat が surjection F_* を誘導するための必要十分条件は $\mathcal{D}$ の任意の対象が $\mathcal{C}$ の対象 (の F による像) の retract になっていることである。必要性は [10] の 7 章演習の 5 番であり、難しくない。十分性は ([10] の言及の通り必要性よりは面倒だが、) $d \in \text{ob}(\mathcal{D})$ ごとに $Fc \rightarrow d$ の形の射からなる d 上の sieve (の characteristic map) に注目すると証明できる。

quotient を与える条件は稠密性を連想させる。小圏 $\mathcal{C}$ から locally small category $\mathcal{D}$ への関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が稠密であるとは, restricted Yoneda 関手

$$\mathcal{D} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$$

が fully faithful なことをいうのであった。米田埋め込みが fully faithful なことより F が quotient を与えるためには F が稠密なことは必要条件である*3。

この節の残りでは稠密性を強めた連結稠密性を導入し, F_* が quotient なこととの同値性を証明する。その後, 稠密性の左 Kan 拡張 (density comonad) を用いた特徴づけに対応する連結稠密性の特徴づけを紹介する。

Definition 5.2 (F 分解). 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ in Cat について, $l : d_0 \rightarrow d_1$ in $\mathcal{D}$ の F 分解とは, $c \in \text{ob}(\mathcal{C})$ と $f_0 : d_0 \rightarrow Fc$ と $f_1 : Fc \rightarrow d_1$ の組 (f_0, c, f_1) であって, $l = f_1 \circ f_0$

$$\begin{array}{ccc} d_0 & \xrightarrow{f_0} Fc & \xrightarrow{f_1} d_1 \\ & \searrow l & \nearrow \\ & & \end{array}$$

*3 同値ではない。簡単な反例としては, 0 点離散圏から 1 点離散圏への関手 $0 \rightarrow 1$ がある。

なるものをいう。 $l: d_0 \rightarrow d_1$ の F 分解の圏 $\text{Fac}_F(l)$ とは, l の F 分解を対象に持ち, (f_0, c, f_1) から (f'_0, c', f'_1) への射は $h: c \rightarrow c'$ in $\mathcal{C}$ であって次の可換性

$$\begin{array}{ccccc} & & Fc & & \\ & \nearrow f_0 & \downarrow Fh & \nwarrow f_1 & \\ d_0 & & & & d_1 \\ & \searrow f'_0 & \uparrow Fh & \swarrow f'_1 & \\ & & Fc' & & \end{array}$$

を満たすものをいう。

remark 5.1 で言及した F_* が surjection であるための必要十分条件は, F 分解の言葉で言えば任意の $d \in \text{ob}(\mathcal{D})$ について $\text{Fac}_F(\text{id}_d)$ が空でないことである。今から定義する連結稠密性はこの条件より (当然) 強いものである。

Definition 5.3 (連結稠密性). 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ in Cat が連結稠密であるとは, 任意の $l: d_0 \rightarrow d_1$ について $\text{Fac}_F(l)$ が連結である*4ことをいう。

informal には, $\mathcal{D}$ 内の任意の “区間” $l: d_0 \rightarrow d_1$ について, 区間内の F の像が (存在し) 連結だと言っている。

Proposition 5.4 (Quotient の誘導の決定). 関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ in Cat について, 以下は同値。

1. F は連結稠密
2. 誘導される geometric morphism $F_*: \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ は quotient
3. $- \circ F^{\text{op}}: \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ は fully faithful

Proof. 2 と 3 の同値性は単に quotient の定義である。1 と 3 の同値性を証明する。3 は $- \circ F^{\text{op}}: \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ とその左随伴 $F_!^{\text{op}}: \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ の合成が (counit を介して) $\text{id}_{\text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}}$ と自然同型なことから (随伴でいつもそうであるように) 同値である。前層圏 $\text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ からの余連続関手は表現可能関手の行き先のみで決定する。 $F_!^{\text{op}}$ は左 Kan 拡張で与えられるが, それを coend を用いて書き下すと任意の $d_0, d_1 \in \mathcal{D}$ について

$$\int^{c \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(d_0, Fc) \times \mathcal{D}(Fc, d_1) \xrightarrow{\circ} \mathcal{D}(d_0, d_1)$$

が全単射であることと同値なことがわかる。これは連結稠密性である。 □

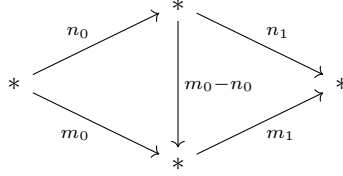
Example 5.5 (離散力学系と可逆性). 加法モノイドの埋め込み準同型 $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ に誘導される関手

$$- \circ i^{\text{op}}: \text{Set}^{\mathbb{Z}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$$

は, 集合と自己全単射の圏から集合と自己写像の圏への埋め込みとみなせる。これは (直接的にもすぐわかるように) fully faithful である。このことを連結稠密性から再確認する。 $\mathbb{Z}$ の唯一の対象を $*$ と書

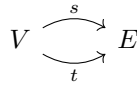
*4 連結成分がちょうど 1 つであること

く. $n_0 + n_1 = m_0 + m_1$ なる整数 $n_0, n_1, m_0, m_1 \in \mathbb{Z}$ について, $n_0 \leq m_0$ なら $m_0 - n_0 \in \mathbb{N}$ であり, $n_0 + (m_0 - n_0) = m_0$ かつ $n_1 = (m_0 - n_0) + m_1$

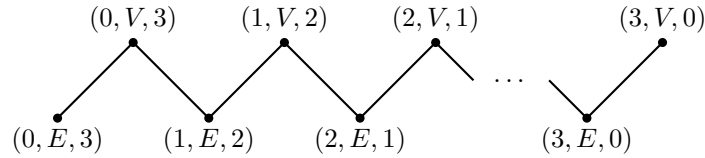


となる. よって i は連結稠密である. (より詳しくは, 任意の $l \in \mathbb{Z}$ について $\text{Fac}_i(l)$ は順序集合 $(\mathbb{Z}, \leq)$ と圏同型である.)

Example 5.6 (離散力学系と有向グラフ). (section 12 を書くときの追記) 圏 Par を, 対象を二つ持ち, その間の並行射と id の計 4 つの射をもつ圏とする.



Par 上の前層圏 $\text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}}$ は有向グラフのなす topos である. $F : \text{Par} \rightarrow \mathbb{N}$ を, 並行射のうち 1 つを $F(s) := 0 \in \mathbb{N}$ へ, もう一つを $F(t) := 1 \in \mathbb{N}$ へ移すことで定める. 関手 F に誘導される関手 $\text{Set}^{\mathbb{N}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}}$ は, 離散力学系 $(X, f : X \rightarrow X)$ を, X を頂点集合に持ち f による遷移関係を辺にもつ有向グラフへと移す. 実は F は連結稠密である. 例えば, $3 \in \mathbb{N}$ について $\text{Fac}_F(3)$ は次のハッセ図を持つ (連結な) 順序集合である.



上の例と合わせて, 有向グラフのトポス $\text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}}$ は, $\mathbb{Z}\text{Set}$ の quotient topoi を全て quotient として持ち, 少なくとも連続体濃度個の quotient topos を持つ.

Remark 5.7 (加群との類似). 前の Example も, Proposition 5.4 の証明における coend の表記も, テンソル積を連想させる. 可換環 A, B とその間の環準同型 $f : A \rightarrow B$ について, 誘導される加群圏の間の関手

$$f^* : B \text{Mod} \rightarrow A \text{Mod}$$

が fully faithful になるためには, B を A 加群とみなしたときの次の射 (counit)

$$B \otimes_A B \rightarrow B$$

が同型になること^{*5}が必要十分である. このことは Proposition 5.4 と同じ方法で証明できる. (2022/02/25 追記): 非可換でも, f : epic まで含めて同値性が成立する. See [13].

(section 12 を書くときの追記) この加群との類似は特に [3] での solid ring を見るとよい.

^{*5} テンソル積が可換環の圏における pushout であることに注目すれば, 単に f が epic であるということ

Example 5.8 (連結トポス). 任意の cocomplete topos $\mathcal{E}$ について, geometric morphism $\mathcal{E} \rightarrow \text{Set}$ (の同型類) はちょうど 1 つ存在する. この射が quotient を与えるとき, $\mathcal{E}$ は連結トポスであると言われる. 小圏 $\mathcal{C}$ について $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ が連結トポスであることは $\mathcal{C}$ が連結であることと同値である. このことを連結稠密性から再確認する. 唯一の geometric morphism $\Delta : \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}$ は関手 $! : \mathcal{C} \rightarrow 1$ に誘導される. 1 の唯一の射 id_* について, $\text{Fac}_!(\text{id}_*) \cong \mathcal{C}$ であるから, $! : \mathcal{C} \rightarrow 1$ が連結稠密であるのは $\mathcal{C}$ が連結であることと同値である.

Example 5.9 (群準同型). (section 10 を書くときの追記) 群準同型 $\phi : G \rightarrow G'$ が連結稠密である必要十分条件は全射群準同型 (関手として full) なことである.

Example 5.10 (関手の直和). (section 10 を書くときの追記) 関手の族 $\{f_\lambda : \mathcal{C}_\lambda \rightarrow \mathcal{D}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, 直和の間に誘導される関手

$$\coprod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda : \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_\lambda \rightarrow \coprod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}_\lambda$$

を考える. このとき, $\coprod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ が連結稠密であることと, 任意の $\lambda \in \Lambda$ について f_λ が連結稠密であることは同値である. 例えば, 任意の圏 $\mathcal{C}$ について, 連結成分のなす集合 (を離散圏とみなしたもの) $\pi_0(\mathcal{C})$ への標準的な関手 $\mathcal{C} \rightarrow \pi_0(\mathcal{C})$ は連結稠密である. 別の例では, Groupoid 間の関手 $F : G \rightarrow G'$ が連結稠密であるのは, F が連結成分の間に一対一対応を与えており, さらに F が full なときである.

ここからは, 連結稠密性の左 Kan 拡張を用いた特徴づけに話を移す. 関手 $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が稠密であることは,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \searrow F & \downarrow \text{id}_F \\ & & \mathcal{D} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \text{id}_D \\ \end{array}$$

が各点左 Kan 拡張であることと同値であった. 実は, 連結稠密性はこの左 Kan 拡張が (CAT 内で) 絶対 Kan 拡張であることと同値である. ここで, 絶対 Kan 拡張は 2-category of locally small categories での絶対 Kan 拡張のことを指す. つまり, 任意の locally small category への関手によって保存される Kan 拡張のことを指す.

Proposition 5.11 (連結稠密性と絶対 Kan 拡張). 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ in Cat について, 以下は同値

1. $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は連結稠密
2. $F^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ は連結稠密
3. 任意の関手 $A : \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ について

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \xrightarrow{A} \text{Set} \\ & \searrow F & \downarrow \text{id}_F \\ & & \mathcal{D} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \text{id}_D \\ \end{array}$$

は右 Kan 拡張

4.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \searrow F & \downarrow \text{id}_F \\ & & \mathcal{D} \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \text{id}_D \\ \end{array}$$

は絶対右 Kan 拡張

5.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \searrow F \quad \downarrow \text{id}_F \quad \nearrow \text{id}_{\mathcal{D}} & \\ & \mathcal{D} & \end{array}$$

は絶対左 Kan 拡張

Proof. 1 と 2 の同値性は連結稠密性の定義から直接確かめられる. 2 と 3 の同値性は, 2 は Proposition 5.4 より $- \circ F : \text{Set}^{\mathcal{D}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}}$ とその右随伴についての unit が iso なことと同値であり, それを書き下したものが 3 であることからわかる. 3 と 4 の同値性は, $3 \Rightarrow 4$ が非自明だが, (各点 Kan 拡張の公式を考えれば) 一般的な文脈で証明できる. 2 と 4 の同値性から, 1 と 5 の同値性もわかる. $\square$

重要なところをまとめておく.

Theorem 5.12 (前層圏に quotient を誘導する関手). 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ in Cat について, 以下は同値

1. $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は連結稠密
2. $F^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ は連結稠密
3. 誘導される geometric morphism $F_* : \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ は quotient
4. $- \circ F^{\text{op}} : \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ は fully faithful
- 5.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ & \searrow F \quad \downarrow \text{id}_F \quad \nearrow \text{id}_{\mathcal{D}} & \\ & \mathcal{D} & \end{array}$$

は絶対左 Kan 拡張

6 連結トポス

この節では Set への quotient を考える. Example 5.8 でも言及したように, トポス $\mathcal{E}$ から Set への geometric morphism は ($\mathcal{E}$ が cocomplete なら存在し, さらに) 存在すれば一意的である. これを $\Delta_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \text{Set}$ と書く. 以下で見るように, $\Delta_{\mathcal{E}}$ が quotient であることは $\mathcal{E}$ の連結性に対応する. (quotient を与える geometric morphism のことを connected geometric morphism という)

まず, トポスの連結性を定義する. 位相空間 X 上の層のトポス $\text{Sh}(X)$ において, terminal の subobject は X の開集合と対応していた. 連結トポスの定義は位相空間の連結性を (安直に) トポスに拡張したものである.

Definition 6.1 (連結トポス). (elementary) topos $\mathcal{E}$ が連結であるとは, non-degenerate topos であって, $1_{\mathcal{E}}$ の subobject $0_{\mathcal{E}} < S_0, S_1 < 1_{\mathcal{E}}$ であって, $S_0 \coprod S_1 \cong 1_{\mathcal{E}}$ なるものが存在しないことをいう.

Example 6.2 (位相空間上の層のトポス). 位相空間 X について, $\text{Sh}(X)$ が連結トポスであることと X が (位相空間として) 連結であることは同値である.

(locally small) category の対象一般について, 連結性は次のように定義されていた.

Definition 6.3 (連結対象). 圏 $\mathcal{C}$ の対象 $c \in \mathcal{C}$ (であって $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ が存在するもの^{*6}) が連結対象であるとは, $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ が任意の small coproduct を保つことをいう.

Top での連結対象は普通の意味の連結な位相空間である.

次は, [7] の Exercise 4.8(に少し書き加えたもの) である.

Theorem 6.4 (連結性と quotient). non-degenerate topos $\mathcal{E}$ であって $\Delta_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \text{Set}$ を持つものについて, 以下は同値.

1. $\Delta_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \text{Set}$ は quotient
2. $\Delta_{\mathcal{E}}^* : \text{Set} \rightarrow \mathcal{E}$ は full
3. $\mathcal{E}$ は連結
4. $\mathcal{E}$ は非自明な直和分解を持たない. つまり, topoi $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ について $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_1$ なら, $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ のうち少なくとも一方は degenerate topos である^{*7}.
5. $\Delta_{\mathcal{E}*} : \mathcal{E} \rightarrow \text{Set}$ は coproduct を保つ
6. terminal object $1_{\mathcal{E}}$ は連結対象である.

Proof. 1 $\implies$ 2 は quotient の定義から簡単. 2 $\implies$ 3 は $\mathcal{E}(\Delta_{\mathcal{E}}^* 1, \Delta_{\mathcal{E}}^* 2) \cong \mathcal{E}(1_{\mathcal{E}}, 1_{\mathcal{E}} + 1_{\mathcal{E}})$ を考えると良い. 3 と 4 の同値性は, 3 $\implies$ 4 は $(1_{\mathcal{E}_0}, 0_{\mathcal{E}_1}) + (0_{\mathcal{E}_0}, 1_{\mathcal{E}_1}) = 1_{\mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_1}$ から, 4 $\implies$ 3 は $S_0 + S_1 = 1_{\mathcal{E}}$ なら $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}/S_0 \times \mathcal{E}/S_1$ からわかる. 3 $\implies$ 5 は, $\mathcal{E}(1_{\mathcal{E}}, -)$ で保たれない coproduct から $1_{\mathcal{E}}$ の非自明な直和分解が得られることからわかる. 5 と 6 の同値性は $\Delta_{\mathcal{E}*} \cong \mathcal{E}(1_{\mathcal{E}}, -)$ からわかる. 5 $\implies$ 1 は, unit

$$\begin{array}{ccc} \text{Set} & \xrightarrow{\text{id}_{\text{Set}}} & \text{Set} \\ & \searrow \Delta_{\mathcal{E}}^* & \downarrow \eta \\ & & \mathcal{E} \\ & \nearrow \Delta_{\mathcal{E}*} & \end{array}$$

が iso なことを見れば良い. 5 を仮定すれば上の三つの関手は (terminal と) 全ての small coproduct を保つので ok. □

7 well-founded quotient

topos を集合論の宇宙との類似で捉えた際の well-foundedness を考える. つまり, 全ての対象が von Neumann hierarchy の中に現れるという条件を考える.

Definition 7.1 (von Neumann hierarchy in topos). cocomplete topos $\mathcal{E}$ について, その von Neumann hierarchy とは, 次の式でに超限再帰的に定義された順序数 α に添字づけられた $\mathcal{E}$ の対象の族 V_{α} のことをいう.

$$V_{\alpha} := \mathcal{P} \left(\coprod_{\beta < \alpha} V_{\beta} \right)$$

ここで, $\mathcal{P}$ は power object を表す.

^{*6} $\mathcal{C}$ が locally small なら十分

^{*7} topoi の圏としての直積は, geometric morphism の意味では直和である. 従って, この条件は非自明な直和分解を持たないという普段の連結性である.

ここで、空な直和は initial object のことと解釈している。つまり、 $V_0 = \mathcal{P}(0) \cong 1_{\mathcal{E}}$ である。また、 $V_1 \cong \mathcal{P}(1_{\mathcal{E}}) \cong \Omega_{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{E}$ の subobject classifier である。

Definition 7.2 (well-founded object, topos). cocomplete topos $\mathcal{E}$ について、

- $\mathcal{E}$ の対象 X が well-founded であるとは、順序数 α が存在し X が V_{α} の subobject になること^{*8}をいう。
- $\mathcal{E}$ が well-founded であるとは、 $\mathcal{E}$ の全ての対象が well-founded であることをいう。

Definition 7.3 (well-founded quotient). $\mathcal{E}_{\text{w.f.}}$ は well-founded な object からなる $\mathcal{E}$ の full subcategory を表す。

Lemma 7.4 (well-foundedness を保つ演算). cocomplete topos $\mathcal{E}$ について、

1. $0_{\mathcal{E}}$: well-founded
2. $1_{\mathcal{E}}$: well-founded
3. $\Omega_{\mathcal{E}}$: well-founded
4. X : well-founded なら X の subobject も well-founded
5. X : well-founded なら X の quotient^{*9} も well-founded
6. X : well-founded なら $\mathcal{P}(X)$ も well-founded
7. X, Y : well-founded なら X^Y も well-founded
8. well-founded object の small limit は well-founded
9. well-founded object の small colimit は well-founded

Proof. 2,3,4,1,6,5,9,8,7 の順に証明するとよい。1,2,3,4 は well-founded の定義から直接わかる。6 は $\exists$ に関する Beck-Chevalley condition を考えればよい。5 は 6 と (contravariant) powerset functor を考えるとよい。9 は coproduct と coequalizer について示せばいい。5 より coequalizer は ok. coproduct も (index に関して多少技巧的な調整をして) $\coprod_{\beta < \alpha} V_{\beta}$ の形の対象に埋め込み、最後には monic $\{ \}_A : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ で V_{α} に埋め込めば良い。8 は 9 と同様に product について示せばいいが、9 を利用すればわかる。7 は monic $(-)^Y$ は右随伴なので monic $\{ \}_X : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ を monic $X^Y \rightarrow \mathcal{P}(X)^Y \cong \mathcal{P}(X \times Y)$ へと移す。あとは 4,6,8 を利用すればわかる。□

Remark 7.5 (Grothendieck topos はいつ well-founded か). 集合論との関係で、Grothendieck topos $\text{Sh}(\mathcal{C}, J)$ がいつ well-founded であるかには興味がある。当然、全ての表現可能関手 y_c の層化が well-founded であることは必要条件であるが、任意の層はこれらの colimit としてかけるので上の lemma より実は必要十分である。例えば、全ての localic Grothendieck topos (Cohen topos 含む) は well-founded である。

Proposition 7.6 (well-foundedness の特徴づけ). cocomplete topos $\mathcal{E}$ について、well-founded object 全体のクラス $\text{ob}(\mathcal{E}_{\text{w.f.}})$ は、以下の三つの操作で閉じた $\text{ob}(\mathcal{E})$ の部分クラスのうち最小のものである。

- power object
- small coproduct

^{*8} 単に monic $X \rightarrow V_{\alpha}$ が存在すること

^{*9} 単に X からの epimorphism を持つ対象のこと

- subobject

Proof. まず、空な図式の coproduct は initial object なので、空なクラスは許されないことに言及しておく。三つの操作で閉じていることは上の lemma からわかる。最小性は well-founded object の定義からわかる。□

geometric morphism $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ が atomic であるとは、inverse image part $f^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ が logical morphism なことをいうのであった。

Theorem 7.7 (well-founded subcategory は最小の atomic quotient). cocomplete topos $\mathcal{E}$ について、埋め込み $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}_{w.f.}$ は atomic な connected geometric morphism (quotient) を与える。さらに、atomic な quotient の中で最小である。

Proof. 埋め込みが lex なことは lemma からわかる。最小性は上の proposition からわかる。埋め込みが左随伴を持つことを示せば良い。 $\mathcal{E} : \text{cocomplete}$ と lemma の 9 番より、任意の対象 $X \in \mathcal{E}$ は well-founded な subobject の中で最大のもの $X_{w.f.} \rightarrowtail X$ を持つ。well-founded object の quotient は再び well-founded だったので、well-founded object から X への射の image は $X_{w.f.}$ 以下である。従って、 $X_{w.f.} \rightarrowtail X$ は埋め込み $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E}_{w.f.}$ に関する普遍射である。□

8 hyperconnected geometric morphism

群作用の topos の quotient も、cocomplete topos の well-founded quotient も、埋め込み $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{Q}$ の右随伴は「 $\mathcal{Q}$ に入っている部分対象の中で最大のもの」という形で与えられていた。性質の良い最大部分対象が右随伴を与えるという現象は (良い分解系と一般随伴関手定理からさまざまな文脈で導出できる背景もあり) coreflective subcategory ではよく見かけるパターンである。このパターンに当てはまる quotient について考えていく。

とりあえず、well-founded quotient のケースを一般化しておく。

Proposition 8.1 (quotient の構成方法の一つ). locally small cocomplete topos $\mathcal{E}$ と、 $\mathcal{E}$ の full subcategory $\mathcal{Q}$ について、 $\mathcal{Q}$ (の essential image) が

1. small coproduct
2. quotient
3. finite limit

で閉じているなら、埋め込み $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{Q}$ は右随伴をもち、 $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{E}$ の quotient を与える。さらに、対応する lex idempotent comonad $\mathbb{G}$ の counit $\epsilon_X : \mathbb{G}X \rightarrow X$ (随伴の counit と言っても同じ) は monic であり、 X の部分対象で $\mathcal{Q}$ に入っているものの中で最大のものを与える。

Proof. 単に手間の問題で、 $\mathcal{Q}$ は同型で閉じた $\mathcal{E}$ の strict な full subcategory だとして示す。これは埋め込みの essential image と $\mathcal{Q}$ の圏同値を考えれば直ちに正当化される。一般随伴関手定理を用いる。まず、1,2 より $\mathcal{Q}$ は cocomplete で埋め込み関手はそれを保存する。solution set condition を確認する。任意に $E \in \text{ob}(\mathcal{E})$ を取る。 $S_Q := \{M \rightarrowtail E \in \text{Sub}_{\mathcal{E}}(E) \mid M \in \text{ob}(\mathcal{Q})\}$ は (適切に同型類から代表元を取れば) small で、 $Q \in \mathcal{Q}$

からの任意の射 $f : Q \rightarrow E$ は image factorization を考えることで、2 より S_Q のうちどれかを経由する。3 より、埋め込み関手は lex なので Q は $\mathcal{E}$ の quotient を与える。 GE が Q に入っている最大の部分対象であることは、 $\epsilon_E : GE \rightarrow E$ の epi-mono 分解の mono 部分が unit の普遍性を満たすことからわかる。 $\square$

quotient がこの形で得られるとは限らない。

Example 8.2 (この形で得られない quotient). 連結な位相空間 X について、 $\Delta : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Set}$ は quotient を与えていた。しかし、 Δ^* の essential image が quotient で閉じているのは X が密着位相であるときのみである。

従って、この構成で得られる quotient は quotient のうち特別なクラスをなしている。調べてみると、hyperconnected geometric morphism という名前がついていて、理論的にも重要な役割を持っていた。

hyperconnected geometric morphism を定義する前に、subquotient という用語を明確にしておく。対象 Q が対象 X の subquotient であるとは、 X の subobject から Q への epimorphism が存在することをいう。

Definition 8.3 (hyperconnected morphism). geometric morphism $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ が hyperconnected であるとは、inverse image part f^* が fully faithful であり (つまり $\mathcal{F}$ は $\mathcal{E}$ の quotient であり)、さらに f^* の essential image が subquotient で閉じていることをいう。

hyperconnected であることの特徴づけはいろいろと知られていて、次の定理は [6] の A の Proposition 4.6.6(に少し書き加えたもの) である。

Theorem 8.4 (hyperconnected の同値条件). geometric morphism $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ について、以下は同値。

1. f は hyperconnected
2. f は quotient を与え、 f^* の essential image は subobject で閉じている
3. f は quotient を与え、 f^* の essential image は quotient で閉じている。 (つまり、Proposition 8.1 で構成される)
4. 随伴 $f^* \dashv f_*$ の unit も counit も monic である。
5. f は quotient を与え、対応する lex idempotent comonad の counit $G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{E}}$ は monic である。
6. counit $\epsilon_E : f^* f_* E \rightarrow E$ は、 E の subobject であって f^* の (essential) image に入っているものの最大のものである。
7. f_* は subobject classifier を保存する
8. f^* が各対象 $X \in \text{ob}(\mathcal{F})$ ごとに誘導する束準同型 $f^* : \text{Sub}_{\mathcal{F}}(X) \rightarrow \text{Sub}_{\mathcal{E}}(f^* X)$ は同型である。

hyperconnected geometric morphism は、localic geometric morphism と共に Geometric morphism の直行分解系を与える。

Definition 8.5 (localic geometric morphism). geometric morphism $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ が localic であるとは、 $\mathcal{E}$ の任意の対象がある $\mathcal{F}$ の対象 F の f^* による像 $f^* F$ の subquotient であることをいう。

Example 8.6 (前層圏). 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ in Cat について、誘導される geometric morphism $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ が localic であることと F が faithful なことは同値である。

Example 8.7 (embedding). geometric morphism $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ は embedding (f_* が fully faithful) なら f^*

が essentially surjective なので localic である。

Example 8.8 (合成). localic geometric morphism は合成で閉じている。前 2 つの例より、任意の位相空間 (or locale) X について、 $\mathrm{Sh}(X) \rightarrow \mathrm{Set}$ は localic である。

次の分解は [6] の A の Theorem 4.6.5 である。

Theorem 8.9 (hyperconnected-localic factorization system). 任意の geometric morphism $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ は、hyperconnected geometric morphism $q : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Q}$ と localic geometric morphism $l : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{F}$ の合成 $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{F}$ へと up to natural iso で unique に、up to natural iso で分解される。

Example 8.10 (関手に誘導される Geometric morphism の分解). 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ in $\mathbf{Cat}$ は full and bijective on objects functor $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ と faithful functor $H : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{D}$ に分解される。この分解に誘導される geometric morphism の分解は hyperconnected-localic factorization である。

Example 8.11 (quotient の分解の例). 圏 $\mathbf{Par}$ を、対象を二つ持ち、その間の並行射と id の計 4 つの射をもつ圏とする。 $\mathbf{Par}$ 上の前層圏 $\mathrm{Set}^{\mathbf{Par}^{\mathrm{op}}}$ は有向グラフのなす topos である。 $\mathbf{Par}$ は連結圏なので $! : \mathbf{Par} \rightarrow \mathbf{1}$ の誘導する geometric morphism $\Delta : \mathrm{Set}^{\mathbf{Par}^{\mathrm{op}}} \rightarrow \mathrm{Set}$ は quotient である。 Δ の hyperconnected-localic factorization を考える。(一般の関手 (in $\mathbf{Cat}$) でできるように) $\mathbf{Par} \rightarrow \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{1}$ という full and bijective on objects functor と faithful functor への分解に誘導される $\mathrm{Set}^{\mathbf{Par}^{\mathrm{op}}} \rightarrow \mathrm{Set}^{\mathbf{2}^{\mathrm{op}}} \rightarrow \mathrm{Set}$ が求めている hyperconnected-localic factorization である。ここで、 $\mathbf{2}$ は対象を二つ $0, 1$ もち非自明な射を一つ $0 \rightarrow 1$ をもつ圏である。 $\mathrm{Set}^{\mathbf{2}^{\mathrm{op}}}$ は写像のなす topos と言ってもよく、Sierpiński space 上の層の topos と言ってもいい。有向グラフの topos $\mathrm{Set}^{\mathbf{Par}^{\mathrm{op}}}$ の full subcategory として考えれば、 Set は全ての対象にループ (自己辺) がちょうど一つあり、辺はそれ以外に存在しないような有向グラフのクラスに対応する。 $\mathrm{Set}^{\mathbf{2}^{\mathrm{op}}}$ は、それらの subquotient とかける有向グラフ、つまり任意の辺がループであるような有向グラフのクラスに対応する。

Example 8.12 (上の例の一般化). 任意の小圏 $\mathcal{C}$ について、前順序集合 $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}$ を次のように定義する。 $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}$ の元は $\mathcal{C}$ の対象であって、順序 $X \leq Y$ は射 $X \rightarrow Y$ の存在で定義する。また、圏 $\mathcal{C}$ の連結成分の集合を $\pi_0(\mathcal{C})$ と書く*¹⁰。自然な関手 $\mathcal{C} \rightarrow \pi_0(\mathcal{C})$ は連結稠密である。よって、誘導される $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \rightarrow \mathrm{Set}^{\pi_0(\mathcal{C})^{\mathrm{op}}}$ は quotient である。この hyperconnected-localic factorization は $\mathrm{Set}^{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \rightarrow \mathrm{Set}^{\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{op}}} \rightarrow \mathrm{Set}^{\pi_0(\mathcal{C})^{\mathrm{op}}}$ で与えられる。

Remark 8.13 (surjective-embedding factorization との比較). geometric morphism の分解としては surjection-embedding が有名だが、全ての quotient は surjection なので quotient に関しては非自明な分解を与えてくれない。

9 hyperconnected より狭いクラス

前の節で、特別な構成方法で得られる quotient のクラスとして hyperconnected を導入した。具体例としては群作用のトポスの quotient や well-founded quotient を挙げていた。しかしこれらの quotient は単に hyperconnected というには性質が良すぎる。hyperconnected よりさらに狭い quotient のクラスを考える。

hyperconnected は、geometric morphism の direct image part が subobject classifier を保つことと同値

*¹⁰ 対象の集合はそのまま、連結性の同値関係を考える方が自然 (だと個人的には考えている)。

であったが、これからは左随伴が subobject classifier を保つ条件を考える。hyperconnected というネーミング (のダサさ) をリスペクトして superconnected と呼ぶことにする。

Definition 9.1 (superconnected). quotient (connected) geometric morphism $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Q}$ が superconnected であるとは、 $f^* : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{E}$ が subobject classifier を保存することをいう。

Example 9.2 (Boolean topos の Quotient). Boolean topos $\mathcal{E}$ からの quotient (connected) geometric morphism $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Q}$ は superconnected である。このことは、 $\mathcal{E}$ の subobject classifier は terminal object 2 つの直和であり、 f^* は全ての finite limit (特に terminal) と finite colimit (特に有限直和) を create することからわかる。

Example 9.3 (群作用トポスの quotient). 群作用トポスは Boolean なので上の例の特別な場合であり、群作用トポスの Quotient は全て superconnected である。

群作用トポスの quotient を決定するときの議論は、まず Boolean から superconnected であることを証明し、そこから hyperconnected なものしかあり得ないと結論付けた。一般的な文脈でこのことを明記しておく。

Proposition 9.4 (super $\implies$ hyper). superconnected geometric morphism は hyperconnected である。

Proof. $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Q}$ が superconnected なら、 f^* は pullback を create するので $\mathcal{Q}$ (の f^* による essential image) は subobject で閉じている。Theorem 8.4 の 2 番の条件より f は hyperconnected. $\square$

さらに、well-founded quotient はさらに atomic であることも観察していた。atomic connected なら定義より直ちに superconnected である。従って次の関係にある。

$$\text{atomic connected} \subset \text{superconnected} \subset \text{hyperconnected} \subset \text{connected}$$

これらは、どの二つも同値ではない。

$$\text{atomic connected} \subsetneq \text{superconnected} \subsetneq \text{hyperconnected} \subsetneq \text{connected}$$

これらの分離をする。Theorem 6.4 で、cocomplete topos $\mathcal{E}$ について $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow \text{Set}$ が connected である (i.e. quotient を与える) ことと topos $\mathcal{E}$ が connected なことは同値なことを見た。hyperconnected, superconnected に対応する命題を見ていく。

Theorem 9.5 (Δ の各種連結性). $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow \text{Set}$ を持つ topos $\mathcal{E}$ について、

1. $\Delta : \text{connected} \iff \mathcal{E} : \text{connected}$
2. $\Delta : \text{hyperconnected} \iff \mathcal{E} : \text{two-valued}$
3. $\Delta : \text{superconnected} \iff \mathcal{E} : \text{connected かつ Boolean}$

Proof. 1 はすでに Theorem 6.4 でみた。2 を示す。 Δ が hyperconnected なことは、Theorem 8.4 の 7 番の条件を考えると、 $\Delta^* \cong \mathcal{E}(1_{\mathcal{E}}, -)$ が subobject classifier を保存すること、つまり $\mathcal{E}(1_{\mathcal{E}}, \Omega_{\mathcal{E}})$ が 2 元集合であることと同値であり、これは two-valued topos の定義そのものである。最後に、3 を証明する。 Δ^* が subobject classifier を保つことは、 $\mathcal{E}$ の subobject classifier が terminal 2 つの直和であることであり、Boolean と同値である。 $\square$

これで、右 2 つの包含関係が真の包含であること

$$\text{atomic connected} \subset \text{superconnected} \subsetneq \text{hyperconnected} \subsetneq \text{connected}$$

は次のように直ちにわかる。

Example 9.6 (位相空間上の層の圏の場合). 連結だが密着位相ではない位相空間 X について, $\Delta : \text{Sh}(X) \rightarrow \text{Set}$ は connected だが hyperconnected でない。

Example 9.7 (前層圏の場合). 小圏 $\mathcal{C}$ について, $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}$ が hyperconnected であることは, $\mathcal{C}$ が strongly connected である (任意の $(X, Y) \in (\text{ob}(\mathcal{C}))^2$ について射 $X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}$ が少なくとも 1 つ存在する) ことと同値である. connected だが strongly connected でない小圏 $\mathcal{C}$ についての $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}$ は connected だが hyperconnected でない. 例え有向グラフのトポス $\text{Set}^{2^{\text{op}}}$ から Set への geometric morphism は connected だが hyperconnected でない。

また, 前層圏 $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ が Boolean であることは $\mathcal{C}$ が groupoid であることと同値だったので, $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}$ が superconnected であることは, $\mathcal{C}$ が連結な groupoid であること, つまり群と圏同値なことである. 従って, Groupoid ではないが strongly connected な圏 $\mathcal{C}$ については $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}$ は hyperconnected だが superconnected ではない. 例え $\mathcal{C}$ としては群でないモノイド (例え加法モノイド $(\mathbb{N}, 0, +)$) や, 空でない有限順序数と順序保存写像の圏 Δ などがあり得る。

最後に,

$$\text{atomic connected} \subsetneq \text{superconnected}$$

の分離をする。

Example 9.8 (群作用トポスの atomic quotient の決定). 群準同型 $\phi : G \rightarrow H$ について, 誘導される関手 $H\text{Set} \rightarrow G\text{Set}$ は logical であり, ゆえに誘導される Geometric Morphism $G\text{Set} \rightarrow H\text{Set}$ は atomic である. $\phi : G \rightarrow H$ が全射なら連結稠密であるので, 全射群準同型 $\phi : G \rightarrow H$ に誘導される $G\text{Set} \rightarrow H\text{Set}$ は atomic quotient である。

実は, $G\text{Set}$ からの atomic quotient はこの形に限られる. section 4 を前提にこのことを確かめる. $G\text{Set}$ の atomic quotient $G\text{Set} \rightarrow \mathcal{Q}$ をとる. $\mathcal{Q}$ に対応する G 上の正規フィルターを $\mathcal{F}$ と書く. example 4.9 より, $\mathcal{F}$ が単項生成であることを確認すればいい. $\mathcal{F}$ が単項生成であるためには, $\mathcal{F}$ が (有限個とは限らない) intersection で閉じていることが必要十分である. [6] の A の Corollary 2.2.10 によると, logical morphism は右随伴を持つとき, その時に限り左随伴を持つ^{*11}. 従って, atomic quotient $G\text{Set} \rightarrow \mathcal{Q}$ の inverse image part $G\text{Set} \leftarrow \mathcal{Q}$ は (左随伴であるので) 右随伴でもあり, 全ての limit を保存し, (reflective なので) 全ての limit を create する. 従って, $\mathcal{F}$ の元の任意の族 $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, $\prod_{\lambda \in \Lambda} G/H_\lambda$ は $\mathcal{Q}$ に入っ

ており, $(H_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の stabilizer である $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ は $\mathcal{F}$ に入っている。

これで, $G\text{Set}$ の atomic quotient (と essential quotient) は群 G の剰余群のみから与えられていることがわかった. 例え, example 4.8 で挙げた, 各軌道が有限な $\mathbb{Z}\text{set}$ からなる $\mathbb{Z}\text{Set}$ の quotient topos は superquotient だが atomic quotient ではない (し, essential quotient でもない)。

^{*11} 2022/01 の私はまだこのことを証明したことがない. 後です. この example の内容自体は exponential を計算することでもっと初等的に (しかし煩雑に) 証明した。

10 連結稠密性の性質: cancellation property の利用

Grothendieck topos の quotient がどれだけあるか、という元の問題を考えるために、特別な場合として小圏 $\mathcal{C}$ からの連結稠密関手はどれだけあるかを考えてみたい。そのために、連結稠密関手の性質を詳しく見ていく。

cancellation property について用語を準備しておく。

Definition 10.1 (cancellation property). 圏 $\mathcal{C}$ と、 $\mathcal{C}$ の射のクラスの部分クラス $E \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ について、 E が cancellation property を持つとは $\mathcal{C}$ 内の任意の可換な三角形

$$\begin{array}{ccc} X & & Z \\ f \downarrow & \searrow^{g_0} & \\ Y & \nearrow_{g_1} & \end{array}$$

について、 $f \in E$ なら $g_0 \in E \iff g_1 \in E$ となることをいう。

Example 10.2 (Set での全射とその一般化). Set において、全射からなるクラス E は cancellation property をもつ。より一般に、任意の圏 $\mathcal{C}$ について、epi 射全てからなる射のクラス E は cancellation property をもつ。別方向の一般化として、圏 $\mathcal{C}$ の直交分解系 (orthogonal factorization system) (E, M) について E は cancellation property をもつ。

Example 10.3 (cancellation property の引き戻し). 関手 $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ の cancellation property をもつクラス E について、 $F : \text{Mor}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{C})$ による E の逆像 $F^{-1}(E)$ も cancellation property をもつ。例えば、concrete category $U : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ について、 $\mathcal{C}$ の射 f であって台となる写像 Uf が全射なもの全体は cancellation property をもつ。

Proposition 10.4 (quotient に関する cancellation property). 以下の射のクラスは cancellation property をもつ。

1. topos と geometric morphism のなす (1-) 圏における connected morphisms
2. topos と geometric morphism のなす (1-) 圏における hyperconnected morphisms
3. Cat における連結稠密関手

Proof. それぞれ、安直に計算すればわかるので略す。3 は 2 を引き戻せば良い。 □

言葉を一つ明確にしておく。圏 $\mathcal{C}$ と cancellation property をもつ $E \subset \mathcal{C}$ について、自己関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が E を保存するとは、 E の元を E の元に送ることをいう。

Lemma 10.5 (E 保存関手の変換). 圏 $\mathcal{C}$ と cancellation property をもつ $E \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ と自己関手 $F, G :$

$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ と自然変換 $\eta : F \Rightarrow G$ を考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ & \Downarrow \eta & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{G} & \mathcal{C} \end{array}$$

F が E を保存し, さらに η の任意の component が E に入っているなら, G も E を保つ.

Proof. F が E を保存し, さらに η の任意の component が E に入っているとす. この時, $f : X \rightarrow Y$ in E を任意にとる.

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\ \downarrow \eta_X & & \downarrow \eta_Y \\ GX & \xrightarrow{Gf} & GY \end{array}$$

において, Ff, η_X, η_Y は E に入っているので, E の cancellation property より Gf も E に入っている. $\square$

この Lemma を利用して, 連結稠密関手についてわかることを見ていく. Lemma において, $\mathcal{C}$ として Cat を考え, F として id_{Cat} を考える. さらに, $\mathcal{C}$ の reflective subcategory $\mathcal{D}$ であって, その unit η が連結稠密なもの考える. そのことによって, $\mathcal{D}$ に入っている特別なクラスの圏の間の連結稠密関手の情報を, 全ての圏についての情報に変換する.

Example 10.6 ($\text{Set} \hookrightarrow \text{Cat}$ と連結成分). 集合を離散圏とみなす埋め込み関手 $\text{Set} \hookrightarrow \text{Cat}$ は, 連結成分の集合をとる関手 $\pi_0 : \text{Cat} \rightarrow \text{Set}$ を左随伴にもつ. unit $\eta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \pi_0(\mathcal{C})$ は連結稠密である. 従って, $\pi_0 : \text{Cat} \rightarrow (\text{Set} \rightarrow \text{Cat})$ は連結稠密性を保つ. 集合 (離散圏) S, T 間の写像 (関手) $f : S \rightarrow T$ が連結稠密であるのは, f が全単射であるときである. 従って, 任意の連結稠密関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ は, 連結成分の間に全単射 $\pi_0(F) : \pi_0(\mathcal{C}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{D})$ を誘導する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow \eta_{\mathcal{C}} & & \downarrow \eta_{\mathcal{D}} \\ \pi_0(\mathcal{C}) & \xrightarrow[\pi_0(F)]{\cong} & \pi_0(\mathcal{D}) \end{array}$$

Example 10.7 ($\text{Groupoid} \hookrightarrow \text{Cat}$ と “導来亜群”). $\text{Groupoid} \hookrightarrow \text{Cat}$ は左随伴 $\mathbb{D} : \text{Cat} \rightarrow \text{Groupoid}$ をもつ. [2] の 5.2 節や [11] の Example 4.1.15. を見ると良い. $\mathbb{D}(\mathcal{C})$ のことを, $\mathcal{C}$ の導来亜群と呼ぶことにする^{*12}. unit $\eta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{D}(\mathcal{C})$ が連結稠密なことは, $\mathbb{D}(\mathcal{C})$ の構成方法と連結稠密性の定義に沿って確かめることができる. 従って, 連結稠密関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が誘導する導来亜群間の関手 $\mathbb{D}(F) : \mathbb{D}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathcal{D})$ も連結稠密である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow \eta_{\mathcal{C}} & & \downarrow \eta_{\mathcal{D}} \\ \mathbb{D}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathbb{D}(F)} & \mathbb{D}(\mathcal{D}) \end{array}$$

Groupoid の間の関手が連結稠密になるのは, 連結成分の一対一対応を与えるような full functor であるときだった (Example 5.10).

^{*12} [11] の Example 4.1.15. によれば, category of fraction と呼ばれているらしい. 亜群化と呼びたくなるかもしれないが, $\text{Groupoid} \hookrightarrow \text{Cat}$ は右随伴 (maximal groupoid) も持っており, 曖昧さが残るので避けた.

11 導来亜群についての詳細

前節の example 10.7 において、導来亜群を考えるモチベーションを得たので、この節で詳細に論じていく。連結稠密関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ の誘導する導来亜群の間の関手 $\mathbb{D}(F): \mathbb{D}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathcal{D})$ は full かつ bijective on connected componets であった。よって、スケルトンの間に誘導される関手 $\text{sk}\mathbb{D}(F): \text{sk}\mathbb{D}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{sk}\mathbb{D}(\mathcal{D})$ はいくつかの全射群準同型の (圏 Groupoid での) 直和になる。特に $\text{sk}\mathbb{D}(\mathcal{D})$ の大きさ^{*13}は $\text{sk}\mathbb{D}(\mathcal{C})$ の大きさ以下である。

この事実を応用して、与えられた小圏 $\mathcal{C}$ からの連結稠密関手の個数を上から抑えたいと安直に考えるかもしれない。しかし、以下で見るように導来亜群をとる操作はスケルトンの大きさに関する情報量を大きく損なっていて、このアイデアは安直には実現しない。

理論的な話に入る前にいくつかの例をみる。

Example 11.1 (連結圏の導来亜群). 圏 $\mathcal{C}$ が連結圏なら、導来亜群 $\mathbb{D}(\mathcal{C})$ は連結な groupoid であり、従って群と圏同値である。 $\mathbb{D}(\mathcal{C})$ と圏同値な群を導来群と呼ぶことにする。モノイド M について、 M の導来 (亜) 群 $\mathbb{D}(M)$ は M の自然な群化、つまり $\text{Group} \rightarrow \text{Monoid}$ の左随伴による M の行き先、と一致する。例えば加法モノイド $\mathbb{N}$ の導来群は $\mathbb{Z}$ である。

Example 11.2 (有向グラフ上の自由圏). 有向グラフ I について、 I 上の自由圏上の導来亜群は、 I 上の自由な Groupoid ($\text{Groupoid} \rightarrow \text{Cat} \rightarrow \text{DirGraph}$ の左随伴) と一致する。

この例に示唆されて、導来亜群のことを圏の基本亜群のように取り扱うことにする。簡単な場合として単連結性について議論しておく。

Definition 11.3 (単連結圏). 圏 $\mathcal{C}$ が単連結であるとは、導来亜群 $\mathbb{D}(\mathcal{C})$ が terminal category $\mathbf{1}$ と圏同値なこと $\mathbb{D}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{1}$ をいう。

Lemma 11.4 (単連結性の十分条件). 圏 $\mathcal{C}$ について、 $\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が cone を持つなら $\mathcal{C}$ 単連結である。

Proof. $\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ が cone α

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} & \mathcal{C} \\ & \searrow \downarrow \alpha \uparrow \swarrow c & \\ & \mathbf{1} & \end{array}$$

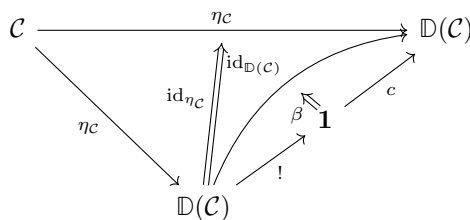
を持つとき、関手 $\eta_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{D}(\mathcal{C})$ は次の自然変換 $\eta_{\mathcal{C}}(\alpha)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{C}}} & \mathbb{D}(\mathcal{C}) \\ & \searrow \eta_{\mathcal{C}} \downarrow \eta_{\mathcal{C}}(\alpha) \uparrow \swarrow c & \\ & \mathbb{D}(\mathcal{C}) & \end{array}$$

を誘導する。ここで、Proposition 5.11 より、 $\eta_{\mathcal{C}}$ の自身に沿った Kan 拡張は $\text{id}_{\mathbb{D}(\mathcal{C})}$ で与えられる。Kan 拡

^{*13} 大きさは安直な、射全体の集合の濃度を意味する

張の普遍性より,



と自然変換 β が伸び、結果として $\text{id}_{D(C)} : D(C) \rightarrow D(C)$ は cone を持つ. identity が cone を持つような groupoid は $\mathbf{1}$ と圏同値なものしかなく、結果として $\mathcal{C}$ は単連結である. $\square$

Example 11.5 (単連結圏の例: initial object). 例えば, initial object を持つ圏は単連結である. 有限集合の圏 $\mathbf{FinSet}$ は単連結である. 双対的に, terminal object を持つ圏も単連結なので simplex category Δ も単連結である. さらに, 空でない任意の順序数 α は順序集合として圏とみなすと (最小元を持つので) 単連結であり, 単連結圏は圏同値類を同一視しても真クラス個存在している.

Example 11.6 (単連結圏の例: 吸収元). モノイド M について id_M の cone とは, モノイド理論の言葉で言えば右吸収元のことである. $z \in M$ が右吸収元であるとは, 任意の $s \in M$ について

$$s * z = z$$

となることを言うのであった. 例えば, 任意の環 R について, R の乗法に関するモノイドは 0_R を (右) 吸収元に持つので単連結である.

Example 11.7 (連結稠密関手の非存在). Example 8.11 では, 連結稠密関手 $\text{Par} \rightarrow \mathbf{2}$ を考えた. では, 逆向きに連結稠密関手は存在するだろうか. Par の導来群は $\mathbb{Z}$ であり, $\mathbf{2}$ の導来群は $\mathbf{1}$ であるのでもし連結稠密関手 $\mathbf{2} \rightarrow \text{Par}$ が存在すれば全射群準同型 $\mathbf{1} \rightarrow \mathbb{Z}$ が誘導されることになり矛盾する. この証明は, ブラウアーの不動点定理の基本群による証明と類似していて, 導来亜群と基本群の類似を強調している.

12 prequotient の完備束

与えられたトポス $\mathcal{E}$ について, $\mathcal{E}$ の quotient たちは包含関係によって順序集合 (順序クラス) をなす. この順序集合の構造について多少知っておきたい. しかし, quotient の順序構造は安直には調べにくい (と 2022/01 の私が感じた) ので, quotient を広げた prequotient と呼ばれる範囲で考えてみる. 2022/01 の私は, quotient と prequotient が実は一致しているか証明も反証もできていない.

Definition 12.1 (prequotient). topos $\mathcal{E}$ の prequotient とは, $\mathcal{E}$ の replete full subcategory $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{Q}$ であって,

- 全ての finite limit を create する.
- $\mathcal{E}$ のもつ全ての small colimit を create する.

を満たすものをいう.

以下では, prequotient をその essential image そのものであるかのような言葉遣いをしてしまうことにする.

Lemma 12.2 (quotient は prequotient). topos $\mathcal{E}$ の quotient は prequotient である.

Proposition 12.3 (prequotient の完備束). topos $\mathcal{E}$ について, $\mathcal{E}$ の prequotient からなる任意のクラスについて, その共通部分は再び prequotient になる. 特に, $\mathcal{E}$ の prequotient (の essential image) 全体は, 包含関係に関して (possibly large) 完備束を為す.

Proof. full subcategory が prequotient になるのは, essential image が finite limit と small colimit で閉じていることと同値である. $\square$

Corollary 12.4 (prequotient の生成の存在). topos $\mathcal{E}$ と, $\mathcal{E}$ の object からなるクラス $S \subset \text{ob}(\mathcal{E})$ について, S を含む最小の prequotient が存在する.

この, prequotient の生成について少し考えていく.

Definition 12.5 (prequotient の生成). topos $\mathcal{E}$ と, $\mathcal{E}$ の object からなるクラス $S \subset \text{ob}(\mathcal{E})$ について, S を含む最小の prequotient を $\langle S \rangle$ と書く.

Definition 12.6 (生成前順序). topos $\mathcal{E}$ と, $\mathcal{E}$ の object からなるクラス $S, S' \subset \text{ob}(\mathcal{E})$ について, $S \preceq S'$ を

$$S \preceq S' \iff \langle S \rangle \subset \langle S' \rangle$$

で定める. $S \preceq S'$ かつ $S' \preceq S$ のことを $S \simeq S'$ と書く.

この二項関係 $\preceq$ は前順序をなす. 関連する集合演算に関しては [15] に書いた. $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{E})$ について, $\{X\} \preceq \{Y\}$ のことを単に $X \preceq Y$ と書くなどの略記をしていく.

Lemma 12.7 (直和分解). cocomplete topos $\mathcal{E}$ と, $\mathcal{E}$ の対象の (small な) 族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について,

$$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \simeq \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Proof. $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \preceq \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ は簡単. $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \succeq \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ は, 次の pullback

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \xrightarrow{!} & 1_{\mathcal{E}} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda & \xrightarrow{\text{index}} & \coprod_{\lambda \in \Lambda} 1_{\mathcal{E}} \end{array}$$

を考えればいい. $\square$

section 4 でやっていたことは, 本質的にはこの前順序の調査であった. 同様の議論を, 写像のトポス $\text{Set}^{2^{\text{op}}}$ で生成前順序の言葉を明示的に用いて行ってみる.

Example 12.8 (写像トポスの (pre)quotient の決定). 任意の写像 $X \rightarrow Y$ は Y の各元ごとに分解すること, 一元集合への写像 $Z \rightarrow 1$ の直和として書ける. 基数 κ ごとに一意的な写像 $\kappa \rightarrow 1$ を ($\text{topos } \text{Set}^{2^{\text{op}}}$ の対象らしく) X_κ と書くことにする. つまり, $\text{Set}^{2^{\text{op}}}$ の対象は基数の族 $\{\kappa_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を用いて $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_{\kappa_\lambda}$ と書ける. X_1 は terminal なので minimum prequotient に入っている. 別の言い方をすれば, X_1 は $\preceq$ に関する最小元

であり、さらに別の言い方をすれば $X_1 \simeq \emptyset$ である。任意の基数 κ について、

$$\coprod_{\alpha \in \kappa} X_0 \rightrightarrows \coprod_{\alpha \in \kappa} X_1 \longrightarrow X_\kappa$$

なる coequalizer diagram が存在し、従って $X_0 \succeq X_\kappa$ となる。また、2 以上の任意の基数 κ について、

$$X_0 \longrightarrow X_1 \rightrightarrows X_\kappa$$

なる equalizer diagram が存在し、従って $X_0 \preceq X_\kappa$ となる。結果として、2 以上の任意の基数 κ について $X_0 \simeq X_\kappa$ となる。

$$X_1 \prec X_0 \simeq X_2 \simeq X_3 \simeq \cdots \simeq X_\omega \simeq \cdots$$

上の Lemma より、任意の prequotient は X_κ の形の対象からなるクラスで生成されるので、prequotient は $\langle X_1 \rangle$ と $\langle X_0 \rangle$ しかあり得ない。これらは **2** の連結性から保証される (section 6) quotient $\text{Set}^{2^{\text{op}}} \leftarrow \text{Set}$ と自明な quotient $\text{Set}^{2^{\text{op}}} \leftarrow \text{Set}^{2^{\text{op}}}$ である。従って quotient もこれらしかない。

この手法は全ての対象が連結成分へ直和分解されて、さらに各連結成分がかなり単純な形をしていることを利用している。

13 Solid monoids

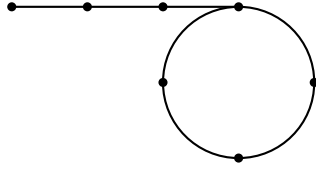
連結稠密関手について理論的に調べるモチベーションがあるが、そのためにも具体的な連結稠密関手を見ていきたい。この節では、加法モノイド $\mathbb{N}$ からの連結稠密関手 $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$ (の一部) を調べたい。

連結稠密関手 $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$ を bo (bijective on objects)-ff (fully faithful) 分解 $\mathbb{N} \rightarrow M \rightarrow \mathcal{C}$ すると、 M は一点圏なのでモノイドである。また、 $M \rightarrow \mathcal{C}$ が誘導する geometric morphism は connected かつ embedding なので圏同値を与えている ($M \rightarrow \mathcal{C}$ は cauchy equivalent)。ゆえに、quotient topos の文脈で興味があるのはモノイドへの連結稠密関手である。以下、 $\mathbb{N}$ からモノイド M への関手 (モノイド準同型) であって連結稠密なものを決定する。この問題は、[3] や [14] における solid ring の問題のモノイドに関する対応物とも考えられる^{*14}。そこで、以下では連結稠密なモノイド準同型 $\mathbb{N} \rightarrow M$ のことを solid monoid と呼ぶことにする。

$\mathbb{N}$ からの solid monoid の例を出す。

Example 13.1 (剰余モノイド)。まずは $\mathbb{N}$ の剰余、つまり $\mathbb{N}$ からの全射モノイド準同型を考える。言い換えれば $\mathbb{N}$ からの regular epimorphism を考える。 $\mathbb{N}$ の剰余モノイドは、 $\mathbb{N}$ 自身であるか、一元 x 生成自由モノイド $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cong \mathbb{N}$ を一つの関係式 $x^a = x^{a+k}$ で割ったものである。ここで、 $a \in \mathbb{N}$ で、 $0 < k \in \mathbb{N}$ である。これを (a, k) 型のモノイドということにする。 $\mathbb{N}$ のことを $(\infty, -)$ 型のモノイドとも呼ぶことにする。語法を明確にするために例を出すと、 $(0, k)$ 型のモノイドは群 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ と同型であり、 $(1, 1)$ 型モノイドは 2 元体と積のモノイド $(\mathbb{F}_2, \times, 1)$ と同型である。剰余モノイド M の視覚化として、 M の元を頂点にもち、 M の元 y ごとに y と yx をつなぐ辺をもつグラフを書いておく。下のグラフは $(3, 4)$ 型モノイドのグラフである。一般に (a, k) 型のモノイドは長さ k のループに長さ a の尻尾がついた形をしている。

^{*14} $\mathbb{Z}$ が環の圏における initial であるのに対し、 $\mathbb{N}$ はモノイドの圏における initial ではないのでこの点では類似は成立していない



Example 13.2 ((a, ∞) 型モノイド). 上の example 以外にも solid monoid が存在する. $a \in \mathbb{N}$ について, まず, $(a, 0)$ 型モノイド $\{x^0, x^1, \dots, x^a (= x^{a+1} = \dots)\}$ と加法モノイド (群) $\mathbb{Z}$ の直積モノイドを考える. その部分モノイドとして

$$\{(x^i, i) \mid 0 \leq i \leq a\} \cup \{(x^a, j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

を考えると, $i \mapsto (x^i, i)$ は $\mathbb{N}$ からの連結稠密なモノイド準同型を与えている. 語法を明確にするため例を出す, $a = 0$ のときは $\mathbb{Z}$ と同型になる. $a = 3$ のときは, $\mathbb{R}$ 上の 3×3 行列と積のモノイド $M_3(\mathbb{R})$ のうち,

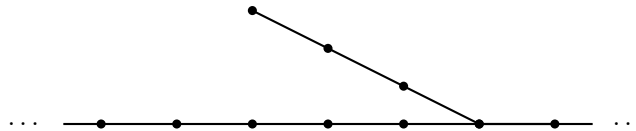
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で生成されるモノイドである.

このモノイドを $a = 3$ のときに同様に視覚化すると,



となる. このモノイドは, (a, k) 型モノイドにおいて長さ k のループを $k \rightarrow \infty$ としたように見えるので (a, ∞) 型モノイドと呼ぶことにする.

連結稠密関手はある種の epi 性であった. この視点から, 関手 $\phi: \mathbb{N} \rightarrow M$ が連結稠密であることは, $\phi(1)$ が M を生成していることと類似しているかもしれない. 生成元を拡張した概念を考えて, (この文章でだけ) 接続元と呼ぶことにする.

Definition 13.3 (接続元). モノイド M の元 $x \in M$ が右接続元であるとは, 任意の $y \in M$ について $a, b \in \mathbb{N}$ が存在し

$$yx^a = x^b$$

となることを言う. 左接続元も双対的に定める.

Example 13.4 (生成元は接続元). M が群なら, 接続元は群の生成元のことである. また, M が単にモノイドのとき, モノイドの生成元とは a として必ず 0 をとれるような接続元のことである.

Lemma 13.5 (連結稠密なら接続). $\phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ をモノイド M への連結稠密関手とし, $x := \phi(1)$ とする. このとき x は右接続元でも左接続元でもある.

Proof. 連結稠密関手の定義を用いて直接確かめられる. $y, z \in M$ の間の $\exists a, b \in \mathbb{N}, yx^a = zx^b$ という関係が同値関係を定めることに注目し, 連結稠密関手の定義を用いて任意の $y \in M$ と単位元 e_M がこの同値関係で繋がれることを帰納的に証明すればいい. $\square$

接続元の概念だけでは連結稠密関手は捉えられていない. 例えば, 次の例で見るように接続元は生成元だけでなく吸収元を拡張した概念とも捉えられる.

Example 13.6 (吸収元は接続元). モノイドの吸収元とは a, b として両方 1 を必ずとれるような接続元のことである. 例えば, 任意の環 R について $(R, \times, 1_R)$ は 0_R を吸収元にもつ.

このように, $x := \phi(1)$ に関する条件としては接続元であるだけでは不十分である.

x が右逆元をもつ (right invertible である) 必要十分条件は $x* : M \rightarrow M$ が全射なことである. 右逆元存在に関するこの必要十分条件を少し弱めたものを考える. 右逆元存在と $x* : M \rightarrow M$ の全射性が同値である証明において重要なことは, $x* : M \rightarrow M$ の像に単位元 e_M が含まれていることだが, 次に考える条件はちょうど単位元を無視したものである. つまり, $x* : M \rightarrow M$ の像に単位元以外の全ての元が含まれるという条件である.

Definition 13.7 (almost invertible). モノイド M の元 $x \in M$ が almost right invertible であるとは, 単位元でないような任意の $y \in M$ についてある $y' \in M$ が存在し $xy' = y$ となることをいう. almost left invertible も同様に定義する.

Lemma 13.8 (連結稠密なら almost invertible). $\phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ をモノイド M への連結稠密関手とし, $x := \phi(1)$ とする. このとき, 以下のいずれかが成立する.

- x は right invertible である.
- x は left invertible である.
- x は almost right invertible かつ almost left invertible である.

特に, x は almost right invertible であるか almost left invertible であるかの少なくとも一方が成立する.

Proof. 双対的な議論により, x が almost right invertible でないと仮定して x が left invertible なことを証明すればいい. x が almost right invertible でないと仮定する. このとき, 単位元でない $y \in M$ が存在し, 任意の $y' \in M$ について $y \neq xy'$ である. 従って, $\text{Fac}_\phi(y)$ において (e_M, y) と (y, e_M) が同一の連結成分にいるためには, $((e_M, y)$ からは identity でない射が伸びていないので (e_M, y) への射を考える必要があり) $e_M = lx$ なる $l \in M$ が必要であり, 従って x は left invertible である. $\square$

ここまでの $x := \phi(1)$ の性質に関する考察を助けに借りて, solid monoids を分類していく.

Lemma 13.9 (二種類の solid monoid). solid monoid $\phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ について, ϕ は全射であるか単射であるか少なくともどちらかが成立する.

Proof. 双対的な議論より, x は almost left invertible であるとして良い. ϕ が単射でも全射でもないと仮定し, 矛盾を導く. $x := \phi(1)$ とする. ϕ が単射でないという仮定より, $a \in \mathbb{N}$ と $k > 0$ で $x^a = x^{a+k}$ なるもの

がとれる．任意に $y \in M \setminus \phi(\mathbb{N})$ を取る． x は右接続元なので，十分大きい $n \in \mathbb{N}$ についてある $c \in \mathbb{N}$ が存在し $yx^{nk} = x^c$ となる． x は almost left invertible なので， $y \notin \phi(\mathbb{N})$ より帰納的に $y = zx^a$ なる $z \in M$ がとれる．すると，

$$y = zx^a = zx^{a+nk} = yx^{nk} = x^c \in \phi(\mathbb{N})$$

となり， $y \notin \phi(\mathbb{N})$ に矛盾する． $\square$

$\phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ が全射なときは M は $\mathbb{N}$ の剰余モノイドなのでもう形はわかっている．問題は ϕ が単射なときである．

Lemma 13.10 (ϕ が単射なときの導来群). solid monoid $\phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ について， ϕ が単射であるとする． $x := \phi(1)$ とする．このとき， $\rho : M \rightarrow \mathbb{Z}$ を $y \in M$ について

$$x^a y x^b = x^c$$

なる $a, b, c \in \mathbb{N}$ を用いて $\rho(y) = c - a - b$ と定義する．この定義は well-defined であり，さらに $\rho : M \rightarrow \mathbb{Z}$ はモノイド準同型を与えている．

Proof. まずは， ρ の well-defined を示す．つまり，上記のような a, b, c は少なくとも一つ存在し，さらに $\rho(y)$ は a, b, c の取り方に依存せず定まることを示す． a, b, c は少なくとも一つ存在することは， x が接続元なことから ($a = 0$ という制約もしくは $b = 0$ という制約を課したとしても) ok. a, b, c の取り方に依存せず定まることを確かめる． $x^a y x^b = x^c$ かつ $x^{a'} y x^{b'} = x^{c'}$ として， $c - a - b = c' - a' - b'$ を示したいが， $\max(a, a'), \max(b, b')$ へと揃えることで $a = a', b = b'$ の時のみ示せば十分である．このときは ϕ が単射なことから $c = c'$ となり ok. これで写像 ρ の well-defined がわかった．

次に $\rho : M \rightarrow \mathbb{Z}$ がモノイド準同型を与えていることを示す．双対的な議論より， x は almost left invertible であるとして良い． $y_0, y_1 \in M$ を任意にとる．この時，仮に $y_0 \in \phi(\mathbb{N})$ なら話は簡単である．実際， $y_0 = x^{\rho(y_0)}$ となることに注意すれば $x^a y_1 x^b = x^{a+\rho(y_1)+b}$ なる $a, b \in \mathbb{N}$ を用いて $x^a y_0 y_1 x^b = x^{a+\rho(y_0)} y_1 x^b = x^{\rho(y_0)} x^{a+\rho(y_1)+b}$ なので ρ の定義より $\rho(y_0 y_1) = \rho(y_0) + a + \rho(y_1) + b - a - b = \rho(y_0) + \rho(y_1)$ である．一方， $y_0 \notin \phi(\mathbb{N})$ の場合を考える． $x^a y_1 x^b = x^{a+\rho(y_1)+b}$ なる $a, b \in \mathbb{N}$ と $x^c y_0 x^d = x^{c+\rho(y_0)+d}$ なる $c, d \in \mathbb{N}$ をとっておく．さらに， x は almost left invertible であるので， $z \in M$ であって $y_0 = zx^a$ なるものが取れる．すると，

$$\begin{aligned} x^c y_0 y_1 x^{a+b+d} &= x^c (zx^a) y_1 x^b x^{a+d} \\ &= x^c z x^{a+\rho(y_1)+b} x^{a+d} \\ &= x^c z x^a x^d x^{a+\rho(y_1)+b} \\ &= x^c y_0 x^d x^{a+\rho(y_1)+b} \\ &= x^{c+\rho(y_0)+d} x^{a+\rho(y_1)+b} \end{aligned}$$

と変形し ρ の定義を用いると $\rho(y_0 y_1) = \rho(y_0) + \rho(y_1)$ が確認できる．ここで， x の肩には非負整数しか乗っていないことに注意．これで， $\rho : M \rightarrow \mathbb{Z}$ がモノイド準同型であることが示せた． $\square$

さらに， $\rho(x) = 1$ と M の導来群が $\mathbb{Z}$ の剰余群であることから， $\rho : M \rightarrow \mathbb{Z}$ は M の群化 $\eta_M : M \rightarrow \mathbb{D}(M)$ と (up to canonical iso で) 一致していることもわかる．

これらの準備のもと，solid monoid を決定する．

Theorem 13.11 (solid monoid の決定). 任意の solid monoid $\phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ について, M は Example 13.1, 13.2 で挙げた可算個の solid monoid のいずれかと同型である.

Proof. まず, Lemma 13.9 より ϕ は全射であるか, 単射である, 全射な時は Example 13.1 の形になっているので ok. 以下, ϕ は単射であるときを考える. Lemma 13.8 より, $x := \phi(1)$ について

1. x は right invertible である.
2. x は left invertible である.
3. x は almost right invertible かつ almost left invertible である.

のいずれかが成立する.

1: x が right invertible なとき. このとき, x の右逆元 $r \in M$ つまり $xr = e_M$ なる r を取る. 任意の $y \in M$ について, x は接続元なので $yx^a = x^b$ なる $a, b \in \mathbb{N}$ が取れる. すると

$$y = yx^a r^a = x^b r^a$$

となる. Lemma 13.10 におけるモノイド準同型 $\rho : M \rightarrow \mathbb{Z}$ を持ちいれば $\rho(y) + a = b$ であるので,

$$y = \begin{cases} x^{\rho(y)} & (\rho(y) \geq 0) \\ r^{|\rho(y)|} & (\rho(y) \leq 0) \end{cases}$$

となる. $\rho(r) = -1$ であることに注意すると, $\rho : M \rightarrow \mathbb{Z}$ は全単射であることがわかり, 結果として M は $\mathbb{Z}$ と同型である.

2: x が left invertible なとき. 1 と同様に M は $\mathbb{Z}$ と同型である.

3: x が almost right invertible かつ almost left invertible であるとき. このとき, $\rho : M \rightarrow \mathbb{Z}$ は $M \setminus \phi(\mathbb{N})$ に制限すれば単射 $M \setminus \phi(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathbb{Z}$ になる. まずこのことを示す. $\phi(y_0) = \phi(y_1)$ なる $y_0, y_1 \in M \setminus \phi(\mathbb{N})$ を任意にとる. このとき十分大きい $n \in \mathbb{N}$ を取れば, x の接続性と ρ の値を考えることで

$$x^n y_0 = x^{\rho(y_0)+n} = y_0 x^n$$

となり, 同様に

$$x^n y_1 = x^{\rho(y_1)+n} = y_1 x^n$$

となる. 以下, $c := \rho(y_0) + n = \rho(y_1) + n (\geq 0)$ とする. さらに, x が almost right invertible かつ almost left invertible であることと $y_0, y_1 \notin \phi(\mathbb{N})$ を繰り返し用いて, $y_0 = z_0 x^c, y_1 = x^c z_1$ なる $z_0, z_1 \in M$ が取れる. このとき

$$\begin{aligned} y_0 &= z_0 x^c \\ &= z_0 x^n y_1 \\ &= z_0 x^{n+c} z_1 \\ &= y_0 x^n z_1 \\ &= x^c z_1 \\ &= y_1 \end{aligned}$$

となり, $y_0 = y_1$ がわかった.

ρ の制限射 $M \setminus \phi(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathbb{Z}$ が単射なことを用いて solid monoid の分類を終わらせにかかる. もし $\rho : M \rightarrow \mathbb{Z}$ の image $\rho(M)$ が $\mathbb{Z}$ 全体でないなら, $\phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ は全射でなければならない. なぜなら,

$\phi: \mathbb{N} \rightarrow M$ が全射でないなら x が almost invertible なことを用いて ρ が全射であることがわかるからである。 $\phi: \mathbb{N} \rightarrow M$ は今単射であるときを考えているので、 $\rho: M \rightarrow \mathbb{Z}$ の image $\rho(M)$ が $\mathbb{Z}$ 全体でないなら、 M は $\mathbb{N}$ と同型になる。 証明の残りでは ρ が全射なときを考える。

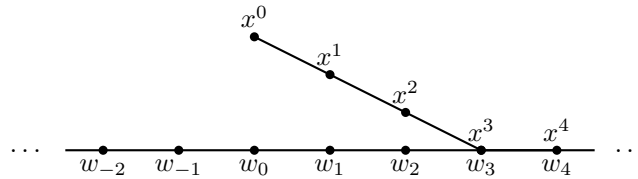
残り、考えるべき状況を整理すると、 $\phi: \mathbb{N} \rightarrow M$ が単射で $\rho: M \rightarrow \mathbb{Z}$ が全射で x が almost right and left invertible なときである。 このとき、 各整数 $n \in \mathbb{Z}$ について $w_n \in M$ を以下の 2 条件を満たす元として定義する。

- $\rho(w_n) = n$
- $\rho(z) < 0$ なる $z \in M$ と $a, b \in \mathbb{N}$ が存在して $x^a z x^b = y$ となる。

この二つの条件を満たすような $w_n \in M$ はちょうど 1 つ存在する。 存在は ρ の全射性から $n < 0$ についてすぐにわかり、 非負の $n \geq 0$ については $w_n := w_{-1} x^{n+1}$ とすることでわかる。 uniqueness も、 まず $n < 0$ については $(\phi(\mathbb{N}))$ の元での ρ の値は非負なので すぐにわかる。 非負な $n \geq 0$ と条件を満たす w について、 x は almost invertible なので (さらに w の満たしている条件の二つ目を用いて) $w = z x^{n+1}$ なる $z \in M$ が取れる。 $\rho(z) = -1$ なので $z = w_{-1}$ となるしかなく、 $w = w_{-1} x^{n+1}$ となる。 w_n がちょうど一つ存在することがわかった。 一意性を用いると、

$$\begin{aligned} w_n w_m &= w_{n+m} \\ w_n x^a &= w_{n+a} \\ x^a w_n &= w_{a+n} \\ x^a x^b &= x^{a+b} \end{aligned}$$

であることがわかる。 ここで $n, m \in \mathbb{Z}$ で $a, b \in \mathbb{N}$ である。 $M = \phi(\mathbb{N}) \cup \{w_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ であることに注目すると、 $w_a = x^a$ なる最小の a (存在は x の接続性からわかる) を用いて M は (a, ∞) 型のモノイドと同型なことがわかる。 これで solid monoid の分類が終わった。



□

14 colevels of a topos

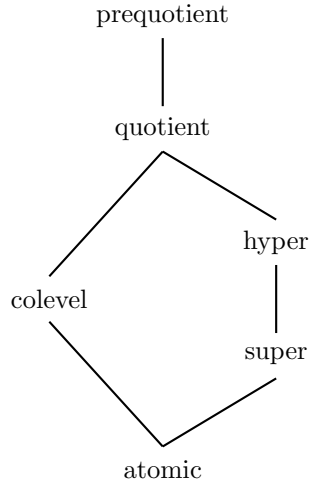
[8] では、与えられた topos の subtopos のうち、embedding が essential geometric morphism なものを level of topos と呼んでいる。同様の定義を quotient について与える。

Definition 14.1 (colevels of a topos). topos E の colevel とは E の quotient $E \leftarrow Q$ であって対応する connected geometric morphism $E \rightarrow Q$ が essential であるものをいう。同値なことだが、単に E の bireflective subcategory のことである。

以下、連結稠密のことを lax epi functor と呼ぶ。

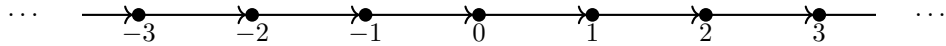
Example 14.2 (lax epi は colevel を誘導する). functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が前層圏の間に誘導する essential geometric morphism $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ が connected なのは F が lax epi のとき. 例えば, 13 章での solid monoids は離散力学系のトポス $\text{Set}^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$ の colevel を与える.

では, 9 章の quotient のクラスにおいて, colevel はどこに位置するかを考える. 結論は次の Hasse 図のようになる.

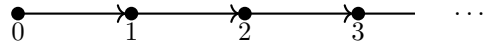


$\text{colevel} \implies \text{quotient}$ は colevel の定義よりわかる. $\text{atomic} \implies \text{colevel}$ は [6] の A の Corollary 2.2.10 からわかる. colevel と hyper や super の間に包含関係がないことを見る.

Example 14.3 (colevel だが hyper でない quotient). Example 5.5 における quotient $\text{Set}^{\mathbb{N}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathbb{Z}^{\text{op}}}$ は (lax epi に誘導されているので) colevel であるが, これは hyper でない. 実際, $\text{Set}^{\mathbb{N}^{\text{op}}} \leftarrow \text{Set}^{\mathbb{Z}^{\text{op}}}$ の (essential) image が subobject で閉じていないことが次のように確認できる.



は essential image に入っているが, その subobject である



は essential image に入っていない.

Example 14.4 (super だが colevel でない quotient). Example 9.8 で既に挙げている.

これで, 包含関係がわかった.

15 colevels of a presheaf topos: 連結稠密関手再考

この節の内容は (些細な精密化はあるものの) 論文 [4] によるものである. 一つ名前を導入しておく.

Definition 15.1 (bole functor). small category 間の functor F が bole functor であるとは, F が bijective on objects かつ lax epimorphism であることを言う.

[4] は, 豊穣圏論的な文脈で前層圏の simultaneously reflective and coreflective subcategory が全て bole functor から誘導されていることを証明している. この節では, この事実の Set 豊穣版を少しだけ精密にみて, 次の定理を証明する.

Theorem 15.2 (colevels of a presheaf topos $\leftrightarrow$ bole functors). 小圏 $\mathcal{C}$ について, $\mathcal{C}$ からの bole functor は $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ の colevel を誘導するが, この対応は bole functors の同型類と colevels(の同値類) の間の一対一対応を与える.

Proof. まず, 逆向きの構成を考える. つまり, 前層圏 $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ とその colevel $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \leftarrow \mathcal{Q}$

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} & \xleftarrow{M} & \mathcal{Q} \\ & R & \end{array}$$

$(L \dashv M \dashv R)$ に対して, bole functor $P: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を構成する. P は,

$$\mathcal{C} \xleftarrow{y_{\mathcal{C}}} \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \xrightarrow{L} \mathcal{Q}$$

の bo-ff factorization

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{P} & \mathcal{D} \\ \downarrow y_{\mathcal{C}} & & \downarrow \iota \\ \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} & \xrightarrow{L} & \mathcal{Q} \end{array}$$

の bo パートとしてとる. P が lax epi であり, さらに元の colevel $\mathcal{Q}$ と圏同値な colevel を induces することは, ι が tiny objects からなる dense full subcategory であることを見れば良い. 詳しくは [4] に書いてある. 一方, 任意の bole functor $P: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について, 次の up to natural iso で可換な図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{P} & \mathcal{D} \\ \downarrow y_{\mathcal{C}} & \cong & \downarrow y_{\mathcal{D}} \\ \text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} & \xrightarrow{\text{Lan}_{P^{\text{op}}}} & \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}} \end{array}$$

を見ると実際に逆向きの対応を与えていることがわかる. □

Example 15.3 (solid monoids). 特別な例として, モノイド M 作用のトポス $\text{Set}^{M^{\text{op}}}$ の colevel は M からの lax epi なモノイド準同型と一対一に対応する. 例えば, $\text{Set}^{\mathbb{N}^{\text{op}}}$ の colevel は 13 章での意味の solid monoids と一対一に対応する. 特に可算無限個である.

16 Top-enrichments induce hyperconnected geometric morphisms

topological group action のトポスは, [10] においても何箇所でも取り上げられているように, よく調べられている.

この文章でも 4 で扱ったように, group G 上の topology は群作用トポス $\text{Set}^{G^{\text{op}}}$ の hyperconnected quotient を与えていた.

[12] では群だけでなくモノイド上の topology へ同様の話を一般化し, topological monoid action のトポスを調べている. この章では, モノイドからさらに圏へ一般化する. ちなみに [12] の 5.4 節 (約 0.5 ページ) では topological category への拡張を考え得るとしており, 大体の方向性が示唆されている. ここで提案されている topological category の概念は, Top-internal category に近い方向性である. 一方, この章で考えるのは Top-enriched category の方向である^{*15}

Definition 16.1 (topological structure). 小圏 $\mathcal{C}$ 上の topological structure (以下, top.str) とは, 各 hom-set $\mathcal{C}(X, Y)$ 上の topology $\mathcal{O}_{X, Y}$ の族 $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_{X, Y})_{(X, Y) \in \text{ob}(\mathcal{C})^2}$ であって, 任意の $X, Y, Z \in \text{ob}(\mathcal{C})$ について合成写像

$$\mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$$

が連続になるものを言う. ここで, domain では直積位相を考えている.

Remark 16.2 (豊穡圏として). small category with a topological structure は, 単に small Top-enriched category のことである. ここで, Top は product で monoidal category とみなしているが, Top は CCC でないので普通豊穡圏を考えるような圏 (Bénabou cosmos のつもり) ではないことには注意.

Definition 16.3 (continuous action). small category $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ 上の top.str $\mathcal{O}$ について, presheaf $P : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ が $\mathcal{O}$ -continuous であるとは, 任意の $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ について,

$$PY \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow PX$$

が連続なことをいう. ここで PX, PY は離散位相で $\mathcal{C}(X, Y)$ は $\mathcal{O}_{X, Y}$ で位相空間とみなし, さらに domain は直積位相を考えている.

$\mathcal{O}$ -continuous presheaves からなる $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ の full subcategory を $\text{Cont}(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ と書く.

これから示したいのは, $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \leftarrow \text{Cont}(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ が hyperconnected quotient を与えることである. そのため, $\mathcal{O}$ -continuity の分かりやすい同値条件が欲しい. 次に定義する transition set はその道具であり, Morgan Rogers の [12] における necessary clopen の概念に対応するものである.

Definition 16.4 (transition set). small category $\mathcal{C}$ 上の presheaf P について, $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ と $x \in PX, y \in PY$ に関する transition set $\mathcal{T}_{x, y}$ を

$$\mathcal{T}_{x, y} := \{f : X \rightarrow Y \mid x = yf\} (\subset \mathcal{C}(X, Y))$$

として定める.

Remark 16.5 (category of elements の hom set として). transition set $\mathcal{T}_{x, y}$ は単に category of elements $\int P$ における hom set $\int P((X, x), (Y, y))$ のことである.

Lemma 16.6 (a criterion of $\mathcal{O}$ -continuity). small category $\mathcal{C}$ とその上の top.str $\mathcal{O}$ と $\mathcal{C}$ 上の presheaf $P : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ について, 以下は同値

1. P は $\mathcal{O}$ -continuous
2. P におけるすべての transition set は open

^{*15} あくまで推測だが, この章の内容は何かしらの意味で Morgan Rogers も知っているものと思っている.

3. P におけるすべての transition set は clopen

Proof. まず、 $1 \iff 2$ を示す。1 の定義は $PY \times \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow PX$ が連続なことであった。 PX, PY は離散位相を考えているので、連続性の定義を書き下して変形すれば 2 との同値性がわかる。2 と 3 の同値性は、

$$\mathcal{C}(X, Y) = \coprod_{y \in PY} \mathcal{T}_{x, y}$$

なる disjoint union への分解を考えればわかる。□

Proposition 16.7 (top.str induce hyperconnected). small category $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ 上の top.str $\mathcal{O}$ について、 $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \leftarrow \text{Cont}(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ は hyperconnected quotient を与える。

Proof. Proposition 8.1 を用いるため、

1. small coproduct
2. quotient
3. finite limit

で閉じていることを確認する。1 は比較的簡単に確かめられる。非自明なのは 2 と 3 である。

2 を示す。 $\alpha : P \rightarrow P'$ が presheaf の epi 射であって、さらに P が $\mathcal{O}$ -continuous であるとする。このとき P' も $\mathcal{O}$ -continuous であることを示す。 $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ と $x' \in P'X$ と $y' \in P'Y$ を任意にとる。この時、

$$\mathcal{T}_{x', y'} = \bigcup_{(x, y) \in \alpha_X^{-1}(x') \times \alpha_Y^{-1}(y')} \mathcal{T}_{x, y}$$

となるので $\mathcal{T}_{x', y'}$ も open の和集合となり open である。ゆえに P' も $\mathcal{O}$ -continuous。

最後に、3 を示す。finite product と subobject で閉じていることを証明すればいいが、subobject は簡単。finite product も、open set の finite intersection が open であることからわかる。□

逆の問題、つまり「presheaf topos の hyperconnected quotient は全て top.str から得られるか?」には興味があるが 2022/04 の私は結論を知らない。状況証拠的に知っていることはいくつかある。

Example 16.8 (4 章の例). 4 章では、群作用のトポスに関してはすべて位相構造からやってきていることを示した。

Example 16.9 (有向グラフトポスの hyperconnected quotient). 有向グラフトポス $\text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}}$ の hyperconnected quotient を考える。 $\text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}} \leftarrow \mathcal{Q}$ が hyperconnected なら、terminal object



とその subobject



は $\mathcal{Q}$ に入っている。coequalizer で閉じているので、辺が全てループであるような有向グラフは全て $\mathcal{Q}$ に入っている。言い換えれば、bole functor $\text{Par} \rightarrow \mathbf{2}$ に誘導される hyperconnected colevel $\text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathbf{2}^{\text{op}}}$ は

最小の hyperconnected quotient である。 $\mathcal{Q}$ がもしループでない辺を持つような有向グラフを一つでも含んでいたとする。このとき、 $\mathcal{Q}$ は subobject で閉じているので $\mathcal{Q}$ は有向グラフ



を含んでいる。結果、 $\mathcal{Q}$ は次の二つの有向グラフ



を含んでいるが、これらは Par 上の二つの表現可能関手である。 $\mathcal{Q}$ は small colimit で閉じているので、 density theorem より $\mathcal{Q}$ は $\text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}}$ 全体である。結果、 $\text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}}$ の hyperconnected quotient は 2 つである。

Par 上の top.str は、 2 元集合 $\text{Par}(V, E)$ 上の位相のことであり、ちょうど 4 つある。誘導される hyperconnected quotient は $\text{Set}^{2^{\text{op}}}$ (が 3 つ) と $\text{Set}^{\text{Par}^{\text{op}}}$ 全体である。Sierpinski space は全体と空集合しか clopen がないので、 Lemma 16.6 の 3 番目の条件を考えると、誘導される hyperconnected は密着位相を考える場合と同じになる。

Example 16.10 (poset action topos). poset P について、 P 上の hom set は高々 1 元集合なので top.str は自明な一つしか存在し得ない。逆問題が正しいと期待するならば、トポス $\text{Set}^{P^{\text{op}}}$ の hyperconnected quotient は $\text{Set}^{P^{\text{op}}}$ 全体しか存在しないと期待するわけだが、実際にこの (poset P に関する特別なケースの) 期待は正しい。このことは、 P 上の表現可能関手は terminal の subobject であることからわかる。(localic であることが大切。)

Example 16.11 (hyperconnected colevels of a presheaf topos are induced by top.strs). Example 8.10 に書いたように、 bijective on objects and full functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ について誘導される geometric morphism $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{D}^{\text{op}}}$ は hyperconnected であった。この hyperconnected quotient は $\mathcal{C}$ 上の top.str から誘導される。実際、各 $\mathcal{C}(X, Y)$ に対して

$$\mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(FX, FY)$$

に関する initial topology を考えるとよい。ここで $\mathcal{D}(FX, FY)$ には離散位相を考えている。言い換えれば、 $\mathcal{C}(X, Y)$ の open は $\mathcal{D}(FX, FY)$ の subset の逆像としてかける部分集合である。

さらに、 $\text{Set}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}$ の hyperconnected な colevel は全てこの形で得られる。実際、 Theorem 15.2 を用いると、 hyperconnected colevel はある bof-functor F に induce されるが、 Example 8.10 より F の bof-f factorization を考えるとよい。

- 17 co-Grothendieck and Grothendieck topos
- 18 Vopěnka principle のもとで prequotient = quotient
- 19 多分書く内容
 - 19.1 安直はなぜうまくいかないのか 1: internal lex comonad
 - 19.2 安直はなぜうまくいかないのか 2: factorization system
 - 19.3 自然に考えるべきだが結論がつかまらない考察
 - 19.4 lax epi vs epi と colevel の数の上限

bo functor について lax epi $\rightarrow$ epi と locally presentable なら co-well powered を用いて数を上から抑える.
bo-epi なら lax epi かを解決し, case study としてモノイドを見る.

20 うまくいったら書く内容

20.1 internal topological space

20.2 co-Grothendieck topos と idempotent adjunction となる Geometric Morphism

20.3 安直はなぜうまくいかないのか 3: lex comonad の idempotent 化

20.4 preorder における類似問題

20.5 Boolean Quotient

20.6 Prequotient lattice of a poset action topos

21 勉強してからなんかあれば書くやつ

21.1 Toposes as Groupoids との関係

21.2 ionad との関係

21.3 locally presentable category theory との関係

21.4 first-order modal logic との関係

21.5 geometric logic 的な解釈

22 個人的未解決な部分問題

定式化できた未解決な問題

Question 22.1. 全ての prequotient は quotient か

Question 22.2. bole functor は, 実は bo epic と同値なのでは?

Question 22.3. Top-enriched category は hyperconnected を誘導するか:Yes

Question 22.4. 前層圏の全ての hyperconnected は Top-enriched 構造からくるか?モノイドに限れば全てになるか (いいえ. $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ の quotient は not hyper).

Question 22.5. 全ての co-Grothendieck topos は Grothendieck か?その逆は (連結性見れば多分偽だけど本当)?

Question 22.6. co-levels of a presheaf topos は small 何か?

これは, すごくそれらしい. bole functor を調べるが, monoid や圏の圏が cowell-powered かは accessible category with pushouts 的にわかるようだ?(see:<https://ncatlab.org/nlab/show/well-powered+category>)

Question 22.7. locale map はいつ quotient を誘導するか

Question 22.8. prequotient, quotient, hyper, super, atomic, essential の包含関係の決定

定式化できてない未解決な問題

Question 22.9. 全ての (Grothendieck topos) についてある対象が存在し, その上の internal topological space(or locale)(の一部) と quotient は対応するか

Question 22.10. prequotient lattice は topos の内部のどんな順序を反映しているか. 特別なケースについてはどうか

連想される問題

Question 22.11. 一般に, 等式理論 T とそのモデル M について, M からの epi 射 (co-subobject) の個数は上から抑えられるか? codomain の濃度は domain の濃度から相対的に抑えられるか?

参考文献

- [1] Jiri Adamek, Robert El Bashir, Manuela Sobral, and Jiri Velebil. On functors which are lax epimorphisms. 2001.
- [2] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra: volume 1, Basic category theory*, volume 1. Cambridge University Press, 1994.
- [3] A.K. Bousfield and D.M. Kan. The core of a ring. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2(1):73–81, 1972.
- [4] Robert El Bashir and Jiri Velebil. Simultaneously reflective and coreflective subcategories of presheaves. *Theory and Applications of Categories*, 10(16):410–423, 2002.
- [5] Peter Freyd. The axiom of choice. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 19:103–125, 1980.
- [6] Peter T Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium: Volume 2*, volume 2. Oxford University Press, 2002.
- [7] Peter T Johnstone. *Topos theory*. Courier Corporation, 2014.
- [8] G Max Kelly and F William Lawvere. *On the complete lattice of essential localizations*. University of Sydney. Department of Pure Mathematics, 1989.
- [9] Bill Lawvere. Open problems in topos theory, Apr 2009. URL:<https://www.acsu.buffalo.edu/~wlawvere/Openproblemstopos.htm>.
- [10] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] Emily Riehl. *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017.
- [12] Morgan Rogers. Toposes of topological monoid actions. *arXiv preprint arXiv:2105.00772*, 2021.
- [13] L Silver. Noncommutative localizations and applications. *Journal of Algebra*, 7(1):44–76, 1967.

- [14] Hans H. Storrer. Epimorphic extensions of non-commutative rings. *Commentarii mathematici Helvetici*, 48:72–86, 1973.
- [15] 私. 圏論の toy example としての集合演算. <https://hora-algebra.github.io/ToyExample1.pdf>.