

# 環上の加群と結合代数の加群

Notation ( $A\text{-Mod}$  と  $A\text{-Mod}$ )

結合代数の環を  $\text{Ring}$ , 環の環を  $\text{Ring}$  と書く.

$A$ : 結合代数 について, 結合代数  $A$  の 右加群の環を  $A\text{-Mod}$

$A$ : 環 について, 環  $A$  の 左加群の環を  $A\text{-Mod}$  と書く.

§1,  $\text{Ring} \hookrightarrow \text{Ring}$

Prop (単位元の付与)

$\mathcal{U}: \text{Ring} \longrightarrow \text{Ring}$  は left adjoint である

$\mathcal{L}: \text{Ring} \longrightarrow \text{Ring}$

$A \longmapsto \mathbb{Z} \oplus A$

自由な単位元 " $1$ " を入れる

$$(m+a) \cdot (n+a')$$

$$:= nm + (ma + na' + aa')$$

とすればよい (詳細は context 俁末)

Remark  $\varphi: \text{Ring} \longrightarrow \text{Ring}$  is faithful + surjective full + ...

e.g.)  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$  is Ring-homomorphism + ...

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \end{array}$$

<https://ncatlab.org/nlab/show/stuff,+structure,+property>

意味は、= 単位元 structure を忘れている。

意味は、structure は "単位元" をある。

Remark of Remark

Monoid  $\longrightarrow$  Semi Group : faithful & not full

= 単位元を忘れている

$$\left( \begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{e} & \mathcal{M} \\ \downarrow & \alpha & \downarrow f \\ \mathbb{1} & \xrightarrow{e'} & \mathcal{M}' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M} \times \mathcal{M} & \xrightarrow{*} & \mathcal{M} \\ f \times f \downarrow & \alpha & f \downarrow \\ \mathcal{M} \times \mathcal{M}' & \xrightarrow{*'} & \mathcal{M}' \end{array} \right)$$

§ 2,  $A\text{-Mod} \longleftrightarrow A\text{-Mod}$

$A = \mathbb{F}_2$  12 2112  $\eta \approx \approx \pi$

$\eta: A\text{-Mod} \longrightarrow \underline{U(A)}\text{-Mod}$

$\exists$   $\eta \approx \eta$ .  $U: \text{Ring} \longrightarrow \text{Ring}$

Prop ( $\eta \approx \eta$ )

$\eta$  is fully faithful  $\approx \approx \approx$ .

---

Remark (equiv of category  $\approx$ ?)

No, 自明  $\approx$  Abelian 群  $M$  (eg.  $\mathbb{Z}$ ) 12 2112.

$M$  12  $\eta$  2112  $\approx$  0-射 12  $\approx \approx \approx$

結合代数  $A$  上 左 加群 構造  $\approx$   $\approx$ .

$M$  is  $\eta_A$ 's essential image 12  $\approx \approx \approx$ .

$$\left( \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\eta_A} & M \\ \downarrow s_1 & \eta & \downarrow s_1 \\ \eta_A(M) & \xrightarrow{\eta_A} & \eta_A(M) \end{array} \right) \quad \text{54 射.}$$

Remark  $\Omega$  群  $\Omega$  の忘却も fully faithful.

いし. 結合代数  $A$  上の 加群  $M$

環  $A$  上の 加群  $M$  として扱うことができる.

3-ベール群  $M$  と 結合代数  $A$  により,

$M$  上の 左  $A$  加群構造は  $A$  の  $\text{End}_{\text{Ab}}(M)$  の

結合代数準同型  $A \rightarrow \text{End}_{\text{Ab}}(M) \subset \text{Rng}$

と対応する.

$$\text{Rng}(A, \text{End}_{\text{Ab}}(M)) \cong \text{Ring}(L(A), \text{End}_{\text{Ab}}(M))$$

本環  $L(A)$ ,  
 $\text{Rng}$  と  $\text{Rng}$  の和

より.  $M$  上の 左  $A$  加群構造と,

$M$  上の 左 (環)  $L(A) (\cong \mathbb{Z} \oplus A)$  加群構造は

一致 に対応している.

Thm  $(A\text{-Mod} \cong L(A)\text{-Mod})$

$A$ : 結合代数  $\hookrightarrow$  Ring  $\begin{array}{c} \xleftarrow{L} \\ \xrightarrow{\quad \perp \quad} \\ \xrightarrow{\quad \cup \quad} \end{array}$  Ring  $\text{a unit}$

$\eta_A: A \longrightarrow UL$  is unital,

$L(A)\text{-Mod} \xrightarrow{\quad L_{L(A)} \quad} UL(A)\text{-Mod} \xrightarrow{\quad \eta_A^* \quad} A\text{-Mod}$

if  $Ab$  is a  $\mathbb{Z}$ -type 可換群 同型  $\cong$  する

the formulation is correct

(proof)

object of  $L(A)$  is  $\mathbb{Z}$ -type (consider)

$L_{L(A)}$ : fully faithful is  $\mathbb{Z}$ -type prop.

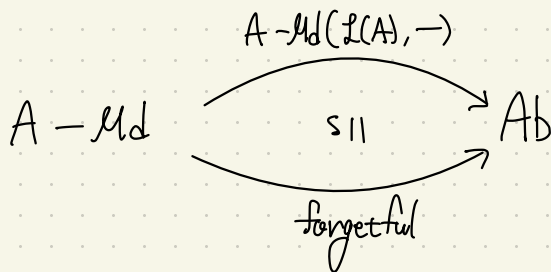
$\eta_A^*$ : fully faithful is 「 $\mathbb{Z} \oplus A$  の積との交換」

$\Leftrightarrow$  「 $\mathbb{Z} \oplus A$  の積との交換」

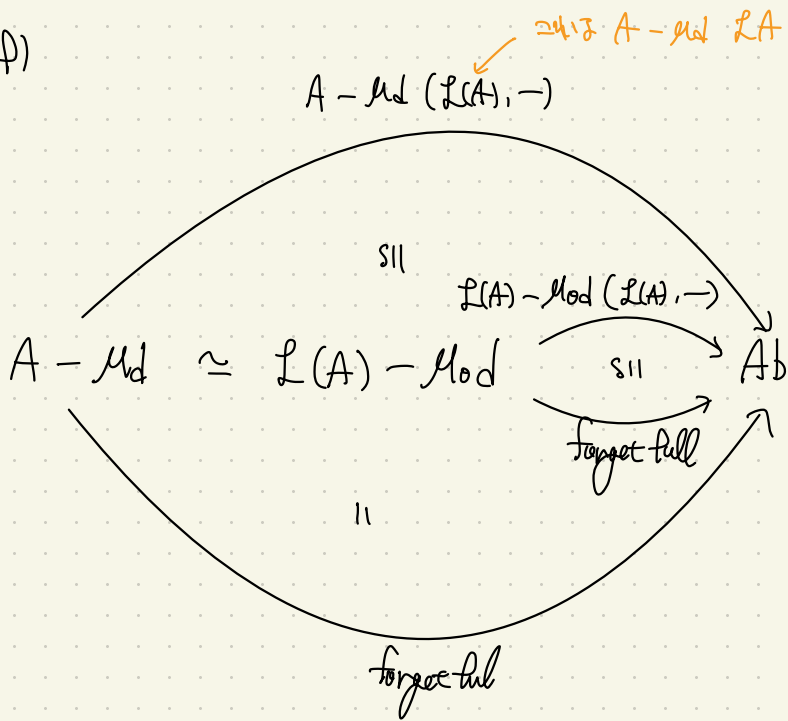
is ok (if condition)

Cor (問題 8)

結合代数  $A$  120112.



(proof)



Lawrence theory & Enriched Category theory?

T34:  $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \neq L(12 \text{ bits})$  ...