

ゼータ関数とメビウス反転

洞龍弥

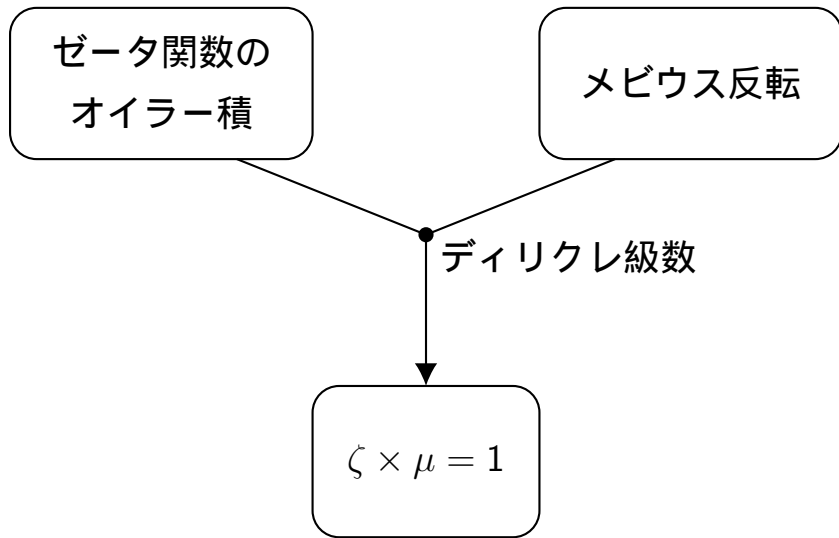
東京大学理学部数学科 4 年

2021 年 12 月 4 日
数理空間トポス

目次

- ① ゼータ関数のオイラー積表示
- ② メビウス反転
- ③ $\zeta \times \mu = 1$
- ④ 進んだ話題の紹介: 圏による一般化

ネタバレ



目次

- 1 ゼータ関数のオイラー積表示
- 2 メビウス反転
- 3 $\zeta \times \mu = 1$
- 4 進んだ話題の紹介: 圏による一般化

リーマンのゼータ関数

定義: リーマンのゼータ関数

リーマンのゼータ関数とは,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

で定まる ($\operatorname{Re}(s) > 1$ 上の), そしてそれを解析接続した) 関数である.

リーマンのゼータ関数

$s = 2$ での値を求める問題はバーゼル問題として有名 .

$$\begin{aligned}\zeta(2) &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \\ &= 1.64493\dots \\ &= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

オイラー積表示

ゼータ関数は素数との繋がりを持つ!

定理: オイラー積表示

$$\zeta(s) = \prod_{p: \text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

オイラー積表示

証明の概要

$$\begin{aligned}\prod_{p: \text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} &= \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \right) \\ &\times \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{27^s} + \dots \right) \\ &\times \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{25^s} + \frac{1}{125^s} + \dots \right) \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\end{aligned}$$

オイラー積表示の応用

$s \rightarrow 1(+0)$ での挙動を見ることで素数が無数に存在することがわかる．

目次

1 ゼータ関数のオイラー積表示

2 メビウス反転

3 $\zeta \times \mu = 1$

4 進んだ話題の紹介: 圏による一般化

メビウス関数

定義: メビウス関数

正整数 n に対して $-1, 0, 1$ のいずれかを返す関数 μ を

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^k & (n \text{ は相異なる } k \text{ 個の素数の積}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で定める.

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	...

メビウス反転

定理: メビウス反転

二つの(複素)数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ について, 以下は同値.

▶ 任意の n について

$$b_n = \sum_{d|n} a_d$$

▶ 任意の n について

$$a_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) b_d$$

例: オイラーの ϕ 関数

例としてオイラーの ϕ 関数を挙げる．正整数 n について $\phi(n)$ は n 以下の自然数で n と互いに素なものの個数である．

n	1	2	3	4	5	6	7	...
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	...

例: オイラーの ϕ 関数

任意の正整数 n について

$$n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

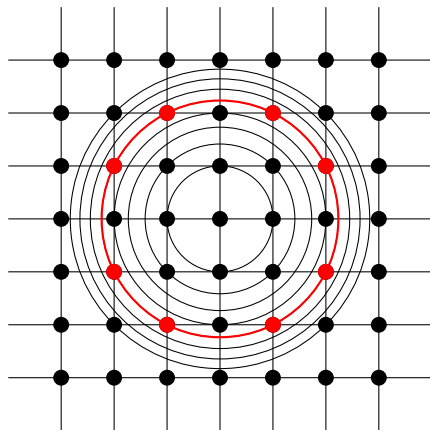
なので $a_n = \phi(n)$, $b_n = n$ とするとメビウス反転公式から

$$\phi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \phi(d)$$

がわかる .

$$\begin{aligned} 6 &= \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \phi(6) \\ \phi(6) &= 1 - 2 - 3 + 6 \end{aligned}$$

例: 格子点の個数(難)



n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
a_n	4	0	-4	0	4	0	-4	0	...
b_n	4	4	0	4	8	0	0	4	...

目次

1 ゼータ関数のオイラー積表示

2 メビウス反転

3 $\zeta \times \mu = 1$

4 進んだ話題の紹介: 圏による一般化

オイラー積に隠れたメビウス関数

ゼータ関数のオイラー積とメビウス反転の間にはどんな関係があるのか？

オイラー積表示はゼータ関数の逆数を計算していると思える．

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta(s)} &= \prod_{p: \text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \\ &= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\end{aligned}$$

形式的ディリクレ級数

定義: 形式的ディリクレ級数

(複素) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に付随する形式的ディリクレ級数とは, (形式的) 無限和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

のことをいう.

形式的ディリクレ級数

数列 $\mu(1), \mu(2), \mu(3), \dots$ に対応する形式的ディリクレ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

も単に μ と書いてしまうことにする .

数列	ディリクレ級数
$1, 1, 1, 1, 1, \dots$	ζ
$\mu(1), \mu(2), \mu(3), \mu(4), \dots$	μ
$1, 0, 0, 0, \dots$	1
約数個数関数	ζ^2

形式的ディリクレ級数

形式的ディリクレ級数の積は自然に定まる．

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{4}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{5}{5^s} + \frac{9}{6^s} + \dots \right) \\ & \times \left(\frac{2}{1^s} + \frac{7}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{8}{4^s} + \frac{2}{5^s} + \frac{8}{6^s} + \dots \right) \\ & = \frac{6}{1^s} + \frac{23}{2^s} + \frac{11}{3^s} + \frac{33}{4^s} + \frac{16}{5^s} + \frac{71}{6^s} + \dots \end{aligned}$$

ゼータの逆数

定理: ゼータの逆数

$$\zeta \times \mu = 1$$

系: メビウス反転

任意の形式的ディリクレ級数 α, β について, 以下は同値.

- ▶ $\beta = \zeta \times \alpha$
- ▶ $\alpha = \mu \times \beta$

ここまでのまとめ

オイラー積もメビウス反転もゼータ関数の逆数の計算である．

目次

① ゼータ関数のオイラー積表示

② メビウス反転

③ $\zeta \times \mu = 1$

④ 進んだ話題の紹介: 圏による一般化

残った疑問

- ▶ 自然数とその積の話をしていたのに，どこから形式的ディリクレ級数が出てきたのか？
- ▶ 自然数のどんな性質がメビウス反転の理論を可能にしたのか？

メビウス反転の一般化は一つの答えを与えてくれる．

一般化メビウス反転

Tom Leinster の論文「Notions of Möbius inversion」では、(finely finite) category $\mathcal{C}$ に関して $\zeta_{\mathcal{C}}$ を定義し、 $\zeta_{\mathcal{C}}$ の逆数として $\mu_{\mathcal{C}}$ を定義する．それにより一般化メビウス反転公式が得られる．

一般化メビウス反転の応用1

多様な「総和とその逆演算」に統一原理を見出せ，組合せ論的に活用できる．

圏	一般化メビウス反転
自然数と積	(古典的) メビウス反転
非負整数と和	「和差分の基本定理」
有限集合の冪集合	包除原理など
非負整数の大小	二項係数の漸化式など
有限集合と包含	完全順列の数え上げなど
⋮	⋮

一般化メビウス反転の応用2

一般化メビウス反転の理論を用いると(位相空間のオイラー標数と整合的な)圏のオイラー標数を定義できる．圏のオイラー標数の特別な例に圏の濃度(Groupoid Cardinality)があり，これは簡単に定義を勉強できる．印象的なフレーズとして「有限集合の個数は e 」を紹介しておく．

参考文献

- ▶ Tom Leinster. Notions of Möbius inversion, 2012.
- ▶ Tom Leinster. The Euler characteristic of a category, 2006.
- ▶ Gian-Carlo Rota. On the Foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions, 1964.
- ▶ John C. Baez, James Dolan. From Finite Sets to Feynman Diagrams, 2000.
- ▶ Terence Tao. Counting objects up to isomorphism: groupoid cardinality, 2017.